Math. P.
705d

Hoffmann

8° Math. P.
705 d

1/31

Geometrische Anschauungslehre.

Eine Vorbereitung zum leichten und gründlichen Studium der Geometrie.

Von
Joh. Jos. Ign. Hoffmann,
königl. bair. Oberschulrath, Direktor des Lyzeums zu Aschaffenburg, Professor der Mathematik und Physik, auch Professor an dem Forstinstitute u. s. w.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS
Mün. d. Innern

Mit sieben Steintafeln.

Mainz,
bey Florian Kupferberg,
1815.

Geom. 220

Bayerische
Staatsbibliothek
München

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Vorerinnerung.

Daß die Geometrie, als Bildungsmittel des jugendlichen Geistes, in der Reihe wissenschaftlicher Erkenntnisse, eine vorzügliche Stelle verdienet, ist schon längst von aufgeklärten Pädagogen und gründlichen Mathematikern entschieden. Für das eigentliche Knabenalter von acht bis etwa vierzehn Jahren giebt es aber noch keine Geometrie als strenge Wissenschaft. Soll also der Knabe zum gründlichen Geometer (nicht blos praktischen Feldmesser) gebildet werden, so muß man ihn, in diesem Alter, zum ernsten Studium derselben gehörig vorbereiten.

Da nun die Geometrie auf den Anschauungen im Raume (d. h. auf Linien, Flächen und Körpern) beruht, das Anschauungsvermögen aber schon frühe in dem Menschen, durch Eindrücke von aussen, erwacht und zur Thätigkeit an-

geregt wird, so wird das beßte Vorbereitungsmittel zur Geometrie in der Ausbildung dieses Anschauungsvermögens bestehen.

In neuern Zeiten ist diese Wahrheit von sachkundigen Männern anerkannt worden; und es erschienen mehrere Versuche, das Studium der Geometrie gründlich vorzubereiten. Ohne ihren Verfassern zu nahe zu treten, bemerke ich nur, daß in der nachfolgenden Schrift mein eigener Plan ausgedacht und durchgeführt worden ist.

Jedem Lehrer, welchem die feste Begründung und Verbeitung seiner Berufswissenschaften am Herzen liegt, muß es erlaubt seyn, seine eigenthümlichen Ansichten ihres Lehrvortrags der Prüfung sachkundiger Männer vorzulegen; zumal wenn solche, gleich den gegenwärtigen, nicht als bloße theoretische Spekulation ausgedacht, sondern aus einem mehr als zwölfjährigen öffentlichen Unterrichte, als praktische Resultate, entsprungen sind.

Leider mußte ich bey meinen öffentlichen Vorträgen der Geometrie, für Jünglinge und junge Männer von 15 bis 24 Jahren, öfters die Erfahrung machen, daß es den Meisten schwerer gefallen ist, sich in die geometrischen Anschau-

ungen mit Fertigkeit und Gewandtheit zu finden, als selbst eine Reihe geometrischer Schlüsse, mit Ueberzeugung, zu durchdenken. Ich suchte, durch eine erweiterte Einleitung und durch mehrfaches Wiederholen der Elementar-Anschauungen, von Winkel, Dreyeck u. s. f., den Mangel zu ersetzen, was denn auch immer sehr Vieles verbessert und das gründliche Fortschreiten erleichtert hat. Allein Manche blieben dennoch zurücke, nicht immer, weil es ihnen an nöthigem Talente und Fleiße gebrach, sondern weil das Anschauungsvermögen in dem Jünglings- und Mannesalter nicht mehr jenen Grad von leichter Empfänglichkeit besitzt, als in dem lebendigern Alter des Knaben.

Das Knabenalter ist also die beßte Zeit zur Bildung des geometrischen Anschauungsvermögens. Diesem ist auch die nachfolgende Schrift vorzüglich gewidmet. Um mich von dem Werthe meiner Lehrart auch praktisch zu überzeugen, unternahm ich es, einen kleinen Kreis von Knaben, nach derselben, zu unterrichten, und fand, zu meinem innigen Vergnügen, daß die Schüler schnelle und sichere Fortschritte machten, und, was nicht unwichtig ist, mit Lust und Liebe diesem Unterrichte folgten.

Daher wünsche ich, zum Beßten der Wissenschaft und der Bildung des jugendlichen Geistes, diese Methode allgemein verbreitet zu sehen; und dieser lebhafte Wunsch bestimmte mich, die Schrift dem sachkundigen, pädagogischen Publikum zu übergeben, mit der bescheidenen Bitte, ihre etwaigen Mängel und Gebrechen, zur Beförderung ihrer Nützlichkeit, eher liebevoll zu verbessern, als absprechend zu rügen. Jedes Menschenwerk ist, mehr oder minder, Stückwerk und dem Ideale sich möglichst anzunähern das schönste Ziel menschlicher Bemühungen. Wie schwer es ist, zweckmäßige Elementarwerke zu liefern, fühlten von jeher auch die Meister in den Wissenschaften, und es gelingt eher für Eingeweihtere, als für die ersten Anfänger, etwas recht Tüchtiges und Brauchbares zu liefern.

Den Vorstehern öffentlicher Schulen wird es nun leicht seyn, nach dem daselbst eingeführten Lehrplane, die Zeit zu bestimmen, wann diese geometrische Anschauungslehre eingeschalten werden muß. Ein Jahr ist hinreichend für ihren öffentlichen Vortrag, nebst den nöthigen Wiederholungen, und die zweckmäßigste Stelle dafür scheint die höchste Classe zu seyn, ehe der Schüler das Gymnasium betritt.

Den Einwurf, daß diese geometrische Anschauungslehre zum Mechanismus führe und den Geist erdrücke, fürchte ich nicht von Sachverständigen. Wer mit meinen frühern Schriften bekannt ist, weiß, daß ich die Gründlichkeit, diesen Grundcharakter mathematischer Wissenschaften, über alles achte. Wer diesem etwas im Vortrage vergiebt, mißkennet den Geist der Mathesis. Allein das Bestreben, mit dieser Gründlichkeit den höchsten Grad von Faßlichkeit zu verbinden, bleibt die strenge Pflicht des Schriftstellers, der für Anfänger schreibt. Wer sich den Geist der hier folgenden Lehrmethode aneignet, wird sich überzeugen, daß es hier nicht auf ein gedankenloses Spielen, mit Linien und Flächen, angelegt ist, welches das rein-geistige zum blinden Mechanismus herabwürdiget, und die Geometrie ihres edelsten Vorzugs beraubet. Der Zögling soll vielmehr eine Gewandtheit erhalten, solche Anschauungen im Raume mit Schnelligkeit, Leichtigkeit und Sicherheit zu übersehen, welche das Material zur geometrischen Wissenschaft liefern, und das strenge Studium derselben ungemein befördern.

Auch ist diese Anschauungslehre an sich selbst ein sehr gutes Bildungsmittel des jugendlichen

Geistes, der hier, auf eine naturgemäße und verhältnißmäßige Weise, in Thätigkeit gesetzt und erhalten wird. Daher sollte sie in jeder Bürgerschule schon deshalb mit Ernste getrieben werden.

Soll aber die geometrische Vorbereitungslehre diese wichtige Vortheile gewähren, so muß der Lehrer mit ihrem Geiste innigst vertraut seyn. Lebendigkeit des Vortrags, Erweckung der jugendlichen Theilnahme, und Vermeidung alles Pedantischen in Rede und Gebährde, müssen ihn kräftig unterstützen. Dann wird der leicht bewegliche Geist der Knaben wunderbar ergriffen, und ihre raschen Fortschritte sind der süßeste Lohn des mühevollen Lehramtes. Wem es Ernst mit dem Lehren ist, der wird sich diese Methode leicht aneignen, und sie durch das Lehren selbst noch vollends erlernen.

Um dem Lehrer die nöthige Anleitung zu seinen Fragen zu geben, ist der erste Cursus dieser Anschauungslehre dialogisch bearbeitet. Die übrigen Cursus sodann, auf gleiche Weise durchzuführen, kann dem verständigen Lehrer nicht schwer fallen. Auch ist das Ganze so eingerichtet, daß die Schrift nicht blos dem Lehrer zum Leitfaden seines Unterrichtes, sondern auch dem Schüler sehr bequem zur Nachlese und Privat-

übung dienet. Daher gehet dem ersten Cursus die kurze Uebersicht voran, damit der Schüler, mit Hülfe der Tafeln, die Hauptsache für sich selbst wiederholen kann. Auf solche Weise muß sich das Buch, um recht nützlich zu seyn, sowohl in den Händen des Lehrers, als auch der Schüler befinden.

Die Einrichtung der sieben Tafeln ist so getroffen, daß sie, wie sonst gewöhnlich, an das Buch geheftet, und beym Lesen ganz herausgeschlagen werden können. Die Zwischenräume bestimmen die Stellen, wo dieselbe bei dem Heraus- und Hineinschlagen gebrochen werden müssen. Auch kann man je zwei zusammengehörige besonders, auf dünne Pappe, aufziehen lassen und diese 42 Täfelchen in einem kleinen Futterale aufbewahren. Diese Einrichtung ist besonders für die Schüler und bei dem Privatunterrichte zu empfehlen, damit man hier durch Umdrehung dieser Täfelchen den Zeichnungen mancherley Lage geben kann.

Für den öffentlichen Unterricht muß die schwarze Schultafel so vorgerichtet seyn, daß sie mit Leichtigkeit um ihre Mitte ganz und gar herumgedreht werden kann. Die etwa 5 Fuß lange und 3 Fuß breite Tafel bekömmt auf ihrer Rückseite

einen senkrecht stehenden ungefähr 4 Zoll langen, 1 Zoll dicken runden Zapfen, welcher in die etwas weitere Oeffnung des Gestelles der Tafel eingeschoben werden kann. Hierdurch ist die Schultafel um ihren Mittelpunkt drehbar, und wird, da das dreifüßige Gestelle immer eine etwas schiefe Stellung hat, in jeder Lage mit der nöthigen Festigkeit ruhen. Ein Anschlag-Lineal, und ein kleineres gewöhnliches Lineal, nebst einem schwarzgebeizten hölzernen Zeiger mit weißer Spitze, einem Schwamme und guter Kreide, sind ebenfalls nöthige Geräthschaften für den Schulunterricht. Zum Privatunterrichte bedienet man sich der kleinen Täfelchen und einer Schiefertafel, um den Zeichnungen noch mehr Mannigfaltigkeit zu geben.

Aschaffenburg, im Febuar 1815.

Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

Sinnstörende Druckfehler.

Seite 9 Zeile 11 von unten; nach rechter Winkel lies Mitten: spitzer Winkel.
— 11 — 12 von oben; statt Linie lies: Linien.
— 12 — 9 v. ob. statt sie l. sich.
— 13 — 8 v. unt. st. Quadat l. Quadrant.
— 14 — 1 v. ob. st. um das Dreyeck l. um den Kreis.
— 15 — 12 v. unt. st. hineinziehen l hineinzeichnen.
— 58 — 2 v. ob. st. ? l. .
— 70 — 15 v. ob. st. cab l cba.
— 72 — 14 v. ob. st. g l. p.
— — — 2 v. unt. st. äussern l. äussere.
— 73 — 8 v. ob. st. fah l. fha.
— — — 9 v. ob. st. gpc l. fpc.
— — — 5 v. unt. st. opf l. cpf.
— — — 2 v. unt. st. abc l. bac.
— 77 — 4 v. unt. st. cam l. can.
— 78 — 9 v. ob. st. bdca l. bcda.
— 82 — 2 v. ob. nach dab l. abc.
— — — 8 v. unt. st. abcdf l. abcfd.
— 83 — 10 v. unt. st. cdg l. cgd.
— 84 — 5 v. ob. st. fgn l. fpn.
— 88 — 13 v. unt. st. pou l. pon.
— 92 — 14 v. unt. st gq l. pq.
— 101 — 4 v. ob. st. ihr l. ihre.
— 103 — 8 v. unt. nach: sie l. sich.
— 104 — 6 v. ob. st. auf l. in.
— 107 — 1 v. unt. st. des Punktes l. der Punkt.

Seite 115	Zeile	12 v. ob.	st. anb l. and.
— 117	—	1 v. unt.	st. g l. y.
— 123	—	1 v. ob.	st. nd l md.
— —	—	14 v. ob.	st. oder l. und.
— 125	—	9 und 12 v. ob.	st. nadbnfn l. nadbmfn.
— 148	—	3 v. ob.	nach: = l. Δ.

Mehrere, den Sinn nicht störende, orthographische Fehler wird der Leser leicht selbst verbessern.

Einleitung.

Der Gegenstand der Geometrie ist der Raum. Sowohl er selbst, als die in ihm zu unterscheidenden drey Elementar-Objecte: Linien, Flächen und Körper sind uns nur durch die Anschauung gegeben und nicht in Begriffen erkennbar. Daher ist der Ursprung der Geometrie in dem Anschauungsvermögen, und nicht in dem Verstande zu suchen. Die Anschauungen sind als das Material zu betrachten, an welchem sich der Verstand sodann erst thätig zeiget. Die Geometrie auf blose Begriffe bauen wollen, ist widersprechend, so wie es hinwiederum unmöglich ist, aus blosen Anschauungen ein geometrisches Gebäude zu errichten. Soll also der Lehrvortrag der Geometrie naturgemäß seyn, so muß er mit den Anschauungen beginnen, dieselben von den einfachsten Elementen bis zum Zusammengesetztern stufenmäßig aufklären; und sodann erst auf diesem fruchtbaren Felde die eigentliche Wissenschaft

erbauen. Daß die Geometrie, auch da wo sie nach der seitherigen Methode gut gelehrt wird, oft nicht die Früchte bringt, die man von ihr erwarten darf, und daß die Schüler öfters nur sehr unbedeutende Fortschritte darin machen, ist die Folge der beynahe gänzlich vernachläßigten Ausbildung des Anschauungsvermögens der Zöglinge. Wie allzudürftig erscheinen nicht in dieser Rücksicht die Einleitungen, welche in den Compendien der Geometrie der eigentlichen Wissenschaft vorangehen. Man begnüget sich meist mit Erklärungen der Hauptelementarbegriffe in einer Kürze, welche das Gepräge der Unvollständigkeit allzudeutlich an sich trägt. Auf eine so magere Grundlage kann durchaus keine ausführliche Wissenschaft gegründet werden. Betritt hingegen der Schüler mit geschärftem, ausgebildeten Anschauungsvermögen das Gebiet der geometrischen Lehren, so müssen seine Fortschritte sicher und schnell seyn, da die Schlüsse des Geometers nur Schritt vor Schritt gehen, und daher Keinem, der ihnen folgen will, Schwierigkeiten verursachen können. Der Vorzug der Geometrie vor vielen andern Disciplinen bestehet nicht allein in ihrer Gewißheit, sondern in der ihr eigenthümlichen Evidenz. Jene beruhet auf der richtigen Anwendung logischer Regeln

auf geometrische Objecte; allein ihre Evidenz geht nur aus der ungemeinen Klarheit hervor, womit wir diese Elementargegenstände der Geometrie in der Anschauung erkennen. Soll also die Geometrie in dem höchsten Glanze ihrer Eigenthümlichkeit erscheinen, so muß die Quelle, woraus jene Evidenz herfließet, nicht verstopft, sondern dem Zöglinge frühe schon und nicht spärlich eröffnet werden. Die Natur selbst ladet hiezu ein. Denn wie frühe schon entwickelt sich das Anschauungsvermögen im Menschen durch Einwirkung der ihn umgebenden Aussendingen? Wie leicht urtheilet das Kind über Verhältnisse des Größern und Kleinern an sichtbaren Objekten? Werden diese Keime, zum Nutzen der Wissenschaft und des Lebens, gehörig entfaltet, so erhält man eine Vorbereitung zur Geometrie, welche die reichlichsten Früchte bringet. Kinder von acht Jahren sind schon dieser stufenmäßigen Ausbildung des Anschauungsvermögens fähig, wie die Erfahrung gelehrt hat; und sie folgen diesem Unterrichte mit Freuden, da er ihre Thätigkeit auf eine leichte und spielende Art beschäftiget.

Der Plan einer solchen geometrischen Anschauungslehre ist in der, hier folgenden, Schrift durchgeführt. Der Verfasser hat sich dabey sehr bemühet,

einem zweckmäßigen Mittelwege zu folgen. Daher vermied er sorgfältig jene endlosen Combinationen räumlicher Gegenstände, welche für's Erste zu nichts Lehrreichem führen, und sodann noch die Thätigkeit des Schülers erschlaffen, anstatt dieselbe verhältnißmäßig anzuregen und zu stärken. Auch schloß er diese Uebungen nicht in allzuenge Grenzen, wodurch sie allen Werth verlohren hätten. Er nahm Alles in seinen Plan auf, was ihm zu dem gründlichen Studium der Elementargeometrie geometrisch wichtig schien, so daß diese geometrische Anschauungslehre als Vorbereitung zu jedem guten Handbuche der Geometrie dienen soll.

Das Ganze zerfällt in vier Cursus, welche theils in unmittelbarer Verbindung, theils im Wechselverhältnisse zusammen stehen.

Der erste Cursus ist den einfachsten Anschauungen geometrischer Gegenstände und ihrer Verbindungen, in systematischer Stufenfolge, gewidmet. Diese Anschauungen werden auf den Tafeln 1 bis 46 vor das Auge gebracht. Hier ist durchaus von keinen wissenschaftlichen Erklärungen die Rede; aber alles muß sehr aufmerksam beschaut werden. Sind einmal die Anschauungen recht klar und lebendig, so

ist es leicht, sich von ihnen zu deutlichen Begriffen zu erheben.

In dem zweiten Cursus wird der Zögling zur Bezeichnung, der ihm nun bereits bekannt gewordenen Anschauungen des ersten Cursus, angeleitet. Diese geschieht durch die Buchstaben des lateinischen Alphabeths, und es ist durchaus, zur Abkürzung des geometrischen Vortrages, nothwendig, sich mit diesem Gegenstande vertraut zu machen. Auf diese Weise wird der zweyte Cursus zugleich eine Wiederholung des ersten. Ausserdem werden aber hier an die, schon klar gewordenen, frühern Anschauungen wieder neue geknüpft, welche dem Zöglinge des ersten Cursus nicht faßlich genug gewesen seyn würden; nun aber mit größter Leichtigkeit aufgefaßt werden können. Durch diesen zweyten Cursus wird also das Feld der Anschauungen sowohl erweitert, als auch dem Schüler die Fertigkeit beygebracht, diese Anschauungen sogleich mit passenden Buchstaben zu bezeichnen. Auch hier kommen keine Erklärungen vor, sondern die gesammte Kenntniß des Schülers überschreitet noch nicht den Kreis des Anschauungsvermögen. Dieser zweyte Cursus wird auf den Tafeln 47 bis 64 durchgeführt.

In dem dritten Cursus wird das Gebiet der

geometrischen Elementar-Anschauungen noch gänzlich abgeschlossen, und der Schüler nun allmählig an scharfe Bestimmung der Begriffe gewöhnet, die sehr leicht auf jene Anschauungen gebauet werden können. Die Tafeln 65 bis 84 dienen zur Erläuterung dieser wichtigen Uebungen.

Den Schluß des Ganzen macht der vierte Cursus, welcher von den mathematischen Abkürzungszeichen, von den Grundsätzen und Foderungen, und endlich von dem Begriffe, den Hauptheilen und der Methode der Mathematik handelt.

Der

Geometrischen Anschauungslehre

Erster Cursus.

Kurze Uebersicht
des
Ersten Cursus.

Tafel 1.

Oben: Punkt. Mitten: Gerade Linie. Unten: Krumme Linie.

Tafel 2.

Oben: Zwey gerade Linien. Mitten: Zwey krumme Linien. Unten: Zwey gerade und eine krumme Linie.

Tafel 3 und 4.

Oben: Zwey ungleiche gerade Linien, eine größere und eine kleinere. Mitten und Unten: Zwey gleiche gerade Linien.

Tafel 5.

Oben: Rechter Winkel. Unten: Stumpfer Winkel. Bemerkung der Schenkel und des Scheitels.

Tafel 6 und 7.

Oben: Rechter Winkel mit ungleichen Schenkeln. Mitten: Spitzer Winkel mit ungleichen Schenkeln. Unten: Stumpfer Winkel mit ungleichen Schenkeln.

Tafel 8.

Oben: Zwey gleiche spitze Winkel. Mitten: Zwey ungleiche spitze Winkel, rechts der kleinere, links der größere. Unten: Zwey ungleiche spitze Winkel, rechts der größere, links der kleinere.

Tafel 9.

Oben, Mitten und Unten: rechte Winkel. Alle rechte Winkel sind gleich, denn ihre Schenkel haben gleiche Neigung.

Tafel 10.

Oben: Zwey gleiche stumpfe Winkel. Mitten: Zwey ungleiche stumpfe Winkel; rechts der größere, links der kleinere. Unten: Zwey ungleiche stumpfe Winkel, oben der größere, unten der kleinere.

Tafel 11.

Oben: Rechts ein spitzer, links ein rechter Winkel. Der spitze Winkel ist kleiner als der rechte Mitten: rechts ein stumpfer, links ein rechter Winkel. Der stumpfe Winkel ist größer als der rechte. Unten: Rechts ein stumpfer, links ein spitzer Winkel. Der stumpfe Winkel ist größer als der spitze.

Tafel 12.

Oben: Rechts ein stumpfer, links ein spitzer Winkel. Der größere Winkel hat hier kleinere, der kleinere Winkel größere Schenkel. Mitten: Oben stumpfer Winkel, unten spitzer Winkel. Der größere Winkel hat kleinere, der kleinere Winkel aber größere Schenkel. Unten: Oben rechter Winkel mit größern Schenkeln, unten stumpfer Winkel mit kleinern Schenkeln. Die Größe eines Winkels besteht nicht in der Größe seiner Schenkel, sondern in der Größe deren Neigung zu einander.

Tafel 13.

Oben: Zwey Nebenwinkel, rechts der spitze, links der stumpfe Winkel. Mitten: Auch zwey Nebenwinkel, rechts der größere, links der kleinere. Unten: Zwey Nebenwinkel, deren jeder ein rechter ist.

Tafel 14.

Oben: Zwey Paare von Scheitelwinkeln; ein Paar spitze Scheitelwinkel (rechts oben und links unten) und ein Paar stumpfe Scheitelwinkel (links oben und rechts unten). Scheitelwinkel sind gleich. Diese zwey Paare Scheitelwinkel bilden vier Paare von Nebenwinkeln. Mitten: Ebenfalls zwey Paare Scheitelwinkel, nur in veränderter Lage der einen geraden Linie. Unten: Scheitelwinkel, die alle rechte Winkel sind.

Tafel 15.

Oben: Zusammenlaufende Linien (nach der Rechten) und auseinanderlaufende Linie (nach der Linken). Mitten: Ebenso, nur mit verwechselter Lage. Unten: Gleichlaufende Linien.

Tafel 16.

Oben: Drey gleiche gerade Linien. Mitten: Zwey gleiche gerade Linien oben, eine ungleiche kleinere, unten. Unten: Zwey gleiche gerade Linien oben und unten, eine kleinere mitten.

Tafel 17, 18, 19 und 20.

Zwey gleiche und eine ungleiche (kleinere) gerade Linie in verschiedenen Lagen. Ebenso auch drey gleiche gerade Linien.

Tafel 21.

Oben: Drey gleiche gerade Linien in Verbindung zu zwey stumpfen Winkeln. Mitten: Zwey gleiche und eine ungleiche gerade Linie ebenso. Unten: Zwey gleiche gerade Linien, die, mit einer dritten kleinern, zwey ungleiche stumpfe Winkel bilden.

Tafel 22.

Oben: Drey gleiche gerade Linien bilden zwey ungleiche stumpfe Winkel. Mitten: Zwey gleiche und eine ungleiche

kleinere bilden einen spitzen und einen stumpfen Winkel: Unten: Zwey gleiche gerade Linien, und eine kleinere bilden zwey spitze Winkel.

Tafel 23.

Zeiget ähnliche Verbindungen von drey Linien.

Tafel 24.

Drey gerade Linien, wovon eine die größte, eine die mittlere, und eine die kleinste ist. Die Lage einer jeden läßt sie oben, mitten und unten leicht bestimmen.

Tafel 25, 26 und 27.

Zeiget drey ungleiche gerade Linien in verschiedenen Lagen, die jedesmal, oben, mitten und unten leicht zu bestimmen sind.

Tafel 28, 29, 30 und 31.

Enthält drey ungleiche gerade Linien in Winkelverbindungen; wobey sowohl diese Winkel als die Schenkel, die sie bilden, nach ihrer Größe leicht benannt werden können.

Tafel 32.

Oben: Gleichseitiges Dreyeck. Mitten: Gleichschenkeliches Dreyeck. Unten: Ungleichseitiges Dreyeck.

Tafel 33 und 34.

Oben: Rechtwinkeliches Dreyeck. Mitten: Spitzwinkeliches Dreyeck. Unten: Stumpfwinkeliches Dreyeck.

Tafel 35.

Oben: Quadrat. Mitten: Rechteck. Unten: Raute.

Tafel 36.

Oben: Rhomboide. Mitten: Paralleltrapez. Unten: Trapez.

Tafel 37 und 38.

Eben diese sechs Vierecke in andern Lagen.

Tafel 39.

Oben: Das Rechteck mit einer Diagonallinie. Mitten: Die Rhomboide mit einer Diagonallinie. Unten: Das Paralleltrapez mit einer Diagonallinie.

Tafel 40.

Oben: Regelmäßiges Fünfeck. Polygonwinkel. Mittelpunkt. Mitten: Regelmäßiges Sechseck. Polygonwinkel. Mittelpunkt. Unten: Regelmäßiges Siebeneck. Polygonwinkel. Mittelpunkt.

Tafel 41.

Oben: Unregelmäßiges Fünfeck. Mitten: Unregelmäßiges Sechseck. Unten: Unregelmäßiges Siebeneck.

Tafel 42.

Oben: Kreis und Mittelpunkt. Mitten: Halbmesser. Unten: Durchmesser.

Tafel 43.

Oben: Sehne. Mitten: Halbkreis. Unten: Quadrat.

Tafel 44.

Oben: Kleinere Sehne, größere Sehne, Tangente. Mitten: Ausschnitt. Unten: Abschnitt. größerer und kleinerer Abschnitt.

Tafel 45.

Oben: Ein, in den Kreis, beschriebenes Dreyeck. Ein, um das Dreyeck beschriebener Kreis. Mitten: Ein in

das Dreyeck, beschriebener Kreis. Ein, um das Dreyeck, beschriebenes Dreyeck. Unten: Ein, in den Kreis, beschriebenes Viereck. Ein, um das Viereck, beschriebener Kreis.

Tafel 46.

Oben: Ein, in das Viereck, beschriebener Kreis. Ein, um den Kreis, beschriebenes Viereck. Mitten: Ein, in den Kreis, beschriebenes Fünfeck. Ein, um das Fünfeck, beschriebener Kreis. Unten: Ein, in das Fünfeck, beschriebener Kreis. Ein, um den Kreis, beschriebenes Fünfeck.

Hier heißt auch der, in das Viereck, beschriebene Kreis der eingeschriebene Kreis; das, um den Kreis, beschriebene Fünfeck, das umschriebene Fünfeck. Aehnliche Benennungen gelten von den übrigen Zeichnungen dieser Tafeln 45 und 46.

Wirkliche Ausführung des Ersten Cursus.

Lehrer. Seht her, Kinder! auf diese schwarze Tafel. Sie ist von Oben nach Unten in drey Gefache eingetheilt. Dieses: (darauf deutend) heißt das obere, dieses: das mittlere, und dieses: das untere. Auf diese drey Gefache werde ich nun, mit einem Stücke zugespitzter Kreide, allerley Zeichnungen machen, die Euch Freude verursachen und in der Folge sehr nützlich seyn werden. Ehe ich aber damit den Anfang mache, müßt Ihr diese drey Gefache wohl von einander zu unterscheiden, und jedoch sehr schnell und sicher zu benennen wissen. Da dieses Gefach (darauf zeigend) das obere ist, so wollen wir es mit dem Worte: Oben bezeichnen. Dieses mittlere heißt: Mitten, und dieses untere nennen wir: Unten. Damit ich nun sehe, ob Ihr dieses recht wohl gefaßt habt, so will ich auf eines dieser Fächer mit dem Zeiger deuten, und Ihr alle werdet mir solches mit vernehmlicher, doch nicht allzulauter, Stimme benennen. (Der Lehrer nimmt nun diese Uebung so lange vor, bis den Schülern die Benennung jedes Faches vollkommen geläufig ist. Nach diesem fährt er folgendermaßen fort.)

Lehrer. Da Ihr dieses nun wohl gefaßt habt, so wollen wir etwas Neues vornehmen. Diese Tafel kann, wie Ihr sehet, um ihre Mitte ganz herumgedreht werden (drehet sie wirklich um). Ich kann sie so stellen, daß die drey Gefache, welche zuvor übereinander standen nunmehr nebeneinander stehen (stellt sie durch eine Viertelsumdrehung in diese Lage). Jetzt sehet Ihr deutlich, daß dieses Gefach (darauf deutend) in der Mitte, dieses zur Rechten und dieses zur Linken ist. Um sie in dieser Lage ebenfalls kurz und schnell zu benennen, heissen wir dieses (darauf weisend): Rechts, dieses: Mitten und dieses: Links. Nun laßt uns sehen, ob Ihr im Stande seyd, jedes dieser Fächer geschwind und richtig zu bezeichnen. (Der Lehrer stellt nun ähnliche Uebungen darüber an wie vorher, und setzt sie so lange fort, bis die Schüler ohne Anstoß und richtig antworten.)

Anmerkung. Zur kürzerer Bezeichnung wollen wir die erste Lage der Tafel immer die lothrechte die zweyte die waagrechte nennen.

Tafel 1 und 2.

(Sie dienen zur Anschauung vom Punkte, von der geraden und krummen Linie.

Lehrer. Nach diesen Vorbereitungen können wir unsere Zeichnungen selbst anfangen (er stellt die Tafel lothrecht und macht in die drey Fächer die Zeichnungen von Nro 1). Nun, schaut her! Das, was Ihr hier (auf den Punkt deutend) sehet, heißt man: Punkt.

Lehrer. Nun sagt mir Alle zugleich: wie heißt das? (darauf weisend).

Schüler. (Antworten Alle mit vernehmlicher Stimme) Punkt.

Lehrer. Wenn ich Euch nun frage: Wo ist der Punkt? Was werdet Ihr antworten?

Schüler. (Wie vorhin) Oben.

Lehrer. Gut. Da Ihr nun den Punkt kennt, so sollt Ihr etwas Neues lernen. Sehet Alle daher (auf die gerade Linie deutend) das hier heißt: gerade Linie. Jetzt sagt mir wieder Alle: wie heißt das?

Schüler. Gerade Linie.

Lehrer. Nun sagt mir auch wieder: wo ist die gerade Linie?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Recht: Jetzt sehet Alle aufmerksam in dieses Fach: (deutend) Das, was hier gezeichnet ist, nennt man: krumme Linie. Merket dies wohl und antwortet mir nun alle zugleich: wie heißt das?

Schüler. Krumme Linie.

Lehrer. Wohl. Gewiß könnt Ihr mir nun auch richtig antworten, wenn ich frage: wo ist die krumme Linie?

Schüler. Unten.

Lehrer. Damit wir nun sehen, ob Euch Alles recht klar und geläufig ist, so wollen wir diese Tafel halb umdrehen (thut dieses). Nun sehet Alle hieher (auf Oben deutend) und sagt mir: wie heißt das?

Schüler. Krumme Linie.

Lehrer. So ists Recht. Aber wie nennt man das? (Auf die Mitte deutend).

Schüler. Gerade Linie.

Lehrer. Gut, und was ist hier? (Auf Unten).

Schüler. Punkt.

Lehrer. Wenn ich nun frage: wo ist der Punkt?

Schüler. Unten.

Lehrer. Wo ist die gerade Linie?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Recht. Aber wo ist die krumme Linie?

Schüler. Oben.

Lehrer. Nun laßt uns die Tafel nochmals drehen. (Er stellt sie so, daß der Punkt zur Rechten ist). Sagt mir jetzt Alle (auf Rechts deutend) wie heißt das?

Schüler. Punkt.

Lehrer. Und wie nennt ihr das? (auf Mitten)

Schüler. Gerade Linie.

Lehrer. Und wie heißt das? (auf Links)

Schüler. Krumme Lienie.

Lehrer. Richtig. Nun sagt mir aber auch, wo steht der Punkt?

Schüler. Rechts.

Lehrer. Wo sehet Ihr die gerade Lienie?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Und wo ist die krumme Linie?

Schüler. Links.

Lehrer. Da Ihr das Alles wisset, so laßt uns die Tafel wiederum drehen. (Er stellt den Punkt zur Linken, und fragt, Rechts deutend) Wie nennt Ihr das?

Schüler. Krumme Linie.

Lehrer. Wie das? (Mitten)

Schüler. Gerade Linie.

Lehrer. Und dies? (Links)

Schüler. Punkt.

Lehrer. Wohl. Nun sagt mir noch: Wo erblicket Ihr die krumme Linie?

Schüler. Rechts.

Lehrer. Wo die gerade?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Und den Punkt?

Schüler. Links.

(Nun folgen Wiederholungsfragen, indem der Lehrer auf die verschiedenen Zeichnungen, ohne bestimmte Ordnung zu halten, und in jeder Lage der Tafel, hindeutet, und sich bey jeder Zeichnung den Namen sagen läßt. Sodann spricht er selbst diese Namen aus, und die Schüler müssen den Ort nennen, an welchem sich die korrespondirenden Zeichnungen befinden. Diese Uebungen werden solange fortgesetzt bis den Schülern sowohl das Benennen als Auffinden im höchsten Grade geläufig ist; eine Fertigkeit, welche sich die Schüler bald erwerben haben. Der Lehrer schreite aber ja nicht eher zur folgenden Tafel, bis die vorhergehende vollkommen eingeübt ist.

Anmerk. Bey dem Privatunterrichte, für einen oder einige Schüler, fällt die große Schultafel hinweg, und die kleinen Anschauungstäfelchen sind hinreichend zur Erklärung und Wiederholung.

Lehrer. Nun Kinder! sollt Ihr etwas Neues

kennen lernen. Seht mir zu, wie ich Euch andere Zeichnungen in die Gefache der Tafel mache. (Nachdem er Nro. 2 gezeichnet hat, fährt er fort). Wie viele Linien seht Ihr hier? (auf Oben deutend.)

Schüler. Zwey.

Lehrer. Sind es gerade Linien oder krumme?

Schüler. Gerade Linien.

Lehrer. Gut. Nun sagt mir auch, wie viele Linien hier (auf Mitten zeigend) stehen?

Schüler. Zwey.

Lehrer. Wie nennt Ihr diese zwey Linien?

Schüler. Krumme Linien.

Lehrer. Ihr habt Recht. Allein wie viele Linien erblicket Ihr da unten? (deutend)

Schüler. Drey Linien.

Lehrer. Sind es drey gerade?

Schüler. Nein.

Lehrer. Sind es drey krumme?

Schüler. Nein.

Lehrer. Was sind es denn, wenn es keine drey gerade und auch keine drey krumme Linien sind?

Schüler. Es sind zwey gerade Linien, und ist eine krumme Linie.

Lehrer. Das war recht geantwortet. Allein nun sagt mir auch: wo sind die zwey krumme Linien?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Wo stehen die beyden geraden Linien?

Schüler. Oben.

Lehrer. Wo sehet Ihr die zwey geraden Linien nebst der krummen Linie?

Schüler. Unten.

(Ist dieses gehörig durchgeübt, so wird die Tafel um ein Viertheil umgedrehet, und eine ähnliche Doppelreihe von Fragen beantwortet. Eben dieses geschieht bey den zwey andern Viertelsumdrehungen derselben, die noch möglich sind. Die Ausführung davon würde hier allzuweitläufig seyn und bleibet folglich der Leitung des verständigen Lehrers überlassen, auf dessen Beurtheilung es hierbey immer ankömmt, zu bestimmen, wann seine Schüler dieser Uebungen nicht mehr bedürfen.)

(Zum Schlusse dieser Anschauung der geraden und krummen Linien noch eine sehr nützliche Uebung).

Lehrer. (stellt die Tafel wie sie anfangs war, deutet auf Oben und Mitten zugleich und fraget:) Wie viele Linien stehen Oben und Mitten zusammen?

Schüler. Vier Linien.

Lehrer. Sind es gerade oder nichtgerade Linien?

Schüler. Gerade und nichtgerade Linien.

Lehrer. Wie viele von jeder Art sind es?

Schüler. Zwey gerade und zwey nichtgerade Linien.

Lehrer. So ist es. Aber wer sagt mir von Euch, wie viele Linien auf der ganzen Tafel (von Oben bis Unten deutend) stehen?

Schüler. Sieben Linien.

Lehrer. Das ist recht. Allein wie viele gerade sind darunter?

Schüler. Vier gerade Linien.

Lehrer. Und wie viele krumme?

Schüler. Drey krumme Linien.

(Diese Uebungen können auch mit Mitten und Unten, ferner mit Oben und Unten zugleich angestellt werden. Eben so wiederum bey umgedrehter Tafel).

Lehrer. (Thut, um diese Uebung zu vollenden, noch folgende Fragen:) Wo sehet Ihr auf dieser ganzen Tafel vier Linien?

Schüler. Oben und Mitten.

Lehrer. Wo erblicket Ihr fünf Linien?

Schüler. Oben und Unten.

Lehrer. Wo noch mehr?

Schüler. Mitten und Unten.

Lehrer. Wo findet Ihr sieben Linien?

Schüler. Oben, Mitten und Unten.

Lehrer. Recht so. Zum Schlusse sagt mir noch: wo haben wir drey krumme Linien?

Schüler. Mitten und Unten.

Lehrer. Wo stehen vier gerade Linien?

Schüler. Oben und Unten.

(Diese Fragen können nach Bedürfniß erweitert werden).

Anmerk. Wenn es dem Lehrer bey seinen Schülern nöthig scheint, so zeichnet er andere krumme und gerade Linien in die drey Felder der Tafel, und setzt, an diesen, ähnliche Uebungen fort.

Tafel 3 und 4.

(Zwey gleiche und zwey ungleiche gerade Linien, die nicht verbunden sind).

Lehrer. (Nachdem er die Linien von Nro. 3 auf die Tafel gezeichnet hat.) Da Ihr nun die geraden und die krummen Linien kennet und zu unterscheiden wisset, so wollen wir einen Schritt weiter gehen, und die geraden Linien mit einander vergleichen. Nun Kinder, sehet Alle hierher (auf Oben deutend) und sagt mir, wie viele Linien seht Ihr hier?

Schüler. Zwey.

Lehrer. So ist es. Aber sind es gerade oder krumme Linien?

Schüler. Gerade Linien.

Lehrer. Nun betrachtet einmal beyde Linien sehr aufmerksam und sagt mir, ob eine so groß wie die andere ist?

Schüler. Nein.

Lehrer. Richtig. Welche ist aber die größere?

Schüler. Die Obere.

Lehrer. Und welche ist die kleinere?

Schüler. Die untere.

Lehrer. Sind also diese zwey Linien gleich oder ungleich?

Schüler. Ungleich.

Lehrer. Nun sagt mir noch: Wie heißt man die obere von diesen beyden Linien?

Schüler. Die größere.

Lehrer. Wie nennt Ihr die untere?

Schüler. Die kleinere.

Lehrer. Eure Antworten sind richtig. Nun sehet hierher (auf Mitten zeigend) und sagt: Wie viele Linien sind dies?

Schüler. Zwey.

Lehrer. Sind sie gerade oder krumme Linien?

Schüler. Gerade.

Lehrer. Ist die eine größer als die andere?

Schüler. Nein.

Lehrer. Sind diese zwey Linien also gleich oder ungleich?

Schüler. Gleich.

Lehrer. Gut. Aber nun schaut auch noch auf diese zwey Linien (Unten) und sagt mir: Sind sie gleich oder ungleich?

Schüler. Gleich.

(Der Lehrer drehet nun die Tafel herum und wiederholet diese Fragen solange, bis die so wichtigen Anschauungen von gleichen und ungleichen geraden Linien den Schülern vollkommen klar geworden sind. Nach diesem werden die Uebungsfragen auch an der Tafel 4 auf gleiche Weise durchgeführet).

Tafel 5, 6, 7 und 8.

(Anschauung des rechten, spitzen, und stumpfen Winkels, der Schenkel und des Scheitels des Winkels.)

Lehrer. (Zeichnet nun Nro. 5 an die Schultafel, und fährt folgendergestalt in seinem Unterrichte fort.) Bisher haben wir zwey gerade Linien blos abgesöndert von einander betrachtet. Nun Kinder,

will ich Euch lehren, was zum Vorschein kömmt, wenn man sie an ihren Enden zusammensetzt. Seyd aber achtsam, damit Euch alles recht klar werde. Wenn diese gerade Linie (auf Oben deutend) mit dieser hier so verbunden wird, wie es Euch der Augenschein lehret, so heißt das: rechter Winkel. Nun sagt mir Alle vernehmlich: Wie heißt das? (deutend)

Schüler. Rechter Winkel.

Lehrer. Was sagt Ihr, wenn ich frage: wo ist der rechte Winkel?

Schüler. Oben.

Lehrer. Da Ihr nun den rechten Winkel gesehen habt, so will ich Euch etwas Neues lehren. Sehet Alle hierher; (auf Mitten) Dies heißt: spitzer Winkel. Betrachtet es aufmerksam und sagt mir: wie heißt das?

Schüler. Spitzer Winkel.

Lehrer. So ist es. Aber wo steht der spitze Winkel?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Jetzt betrachtet noch diese untere Zeichnung. (darauf weisend) Was Ihr hier sehet, heißt stumpfer Winkel. Sagt mir sogleich Alle: wie heißt das?

Schüler. Stumpfer Winkel.

Lehrer. Wo stehet denn der stumpfe Winkel?

Schüler. Unten.

(Die sehr nöthigen Wiederholungsfragen, gehen genau nach dem Muster der, oben zu Tafel 1, gehörigen Fragen. Da der verständige Lehrer hieraus

ihren Gang übersieht, so ist es hinreichend, hier darauf aufmerksam gemacht zu haben.)

(Tafel 6 dienet zur Wiederhohlung. Tafel 7 aber ist bestimmt, den Schülern die Benennungen von Schenkel und Scheitel des Winkels beyzubringen, d. h. durch die Anschauung klar zu machen. Der Unterricht nimmt dazu folgenden Gang.)

Lehrer. (Nachdem Nro. 7 auf die Tafel gezeichnet ist, deutet er auf Oben) Ihr wisset nun die verschiedenen Winkel von einander zu unterscheiden, und jeden einzelnen richtig zu benennen. Nun müßt Ihr Euch noch folgendes merken. Seht her! diese zwey gerade Linien, welche den Winkel bilden, heissen: die Schenkel des Winkels. Damit Ihr Euch dieses Wort sogleich einpräget, so sagt mir alle: wie heißt man diese zwey gerade Linien, (deutend) welche diesen Winkel bilden?

Schüler. Die Schenkel des Winkels.

(Diese Fragen werden nun, bey Mitten und Unten, wiederholet.)

Lehrer. Nun betrachtet einmal diesen rechten Winkel (auf Oben deutend) und sagt: hat er gleiche oder ungleiche Schenkel?

Schüler. Ungleiche.

Lehrer. Wo ist der größere Schenkel?

Schüler. Rechts.

Lehrer. Wo der kleinere?

Schüler. Links.

Lehrer. Nun Kinder merkt Euch noch mehr, was ich sage. Dieser Ort (deutend) wo beyde Schen-

kel eines Winkels zusammenstoßen, heißt: Scheitel des Winkels. Nun will ich von Euch allen hören: wie heißt das? (deutend)

Schüler. Scheitel des Winkels. (Eben dieses bey Mitten und Unten.)

Lehrer. Wie viele Schenkel hat jeder Winkel?

Schüler. Zwey.

Lehrer. Wie viele Scheitel hat jeder Winkel?

Schüler. Nur einen.

(Nun werden an dieser Tafel nach den vier Hauptrichtungen der Schultafel, die Anschauungen vom rechten, spitzen und stumpfen Winkel, von den Schenkeln des W., von dem größern und kleinern Schenkel und vom Scheitel solange durchgeübt, bis den Schülern Alles klar und geläufig ist. Der Gang dieser Wiederhohlungsfragen liegt in den seitherigen Mustern.)

Tafel 8, 9, 10 und 11.

(Anschauung von gleichen und ungleichen, von grössern und kleinern Winkeln.)

Lehrer. Aus unserm frühern Unterrichte habt ihr gelernt, zwey gleiche oder zwey ungleiche gerade Linien durch das blose Anschauen zu erkennen. Gleichwie es nun gleiche und ungleiche gerade Linien giebt, so giebt es auch gleiche und ungleiche Winkel. Was man gleiche, und was man ungleiche Winkel nennet, will ich Euch heute zeigen. Aber seyd aufmerksam auf das, was ihr sehen und von mir hören werdet. (Er zeichnet Nro. 8 an die Tafel, deutet auf Oben und

spricht) Seht her, und sagt: wie viele Winkel stehen hier?

Schüler. Zwey.

Lehrer. Richtig. Sind es rechte, spitze oder stumpfe?

Schüler. Spitze Winkel.

Lehrer. So ist es. Allein jetzt betrachtet einmal diese Oeffnungen (deutend) der beyden Winkel genau und sagt mir: sind beyde Winkel gleich oder ungleich?

Schüler. Gleich.

Lehrer. Recht, denn beyde haben gleiche Oeffnungen ihrer Schenkel. Nun beschauet einmal diese zwey Winkel (auf Mitten) und sagt: sind es stumpfe, spitze oder rechte Winkel?

Schüler. Spitze Winkel.

Lehrer. Wohl. Aber jetzt betrachtet wieder beyde Winkel gegen einander. Was glaubt Ihr nun? Sind diese zwey Winkel gleich oder ungleich?

Schüler. Ungleich.

Lehrer. Getroffen; denn sie haben ungleiche Oeffnungen ihrer Schenkel. Aber wo ist der größere?

Schüler. Links.

Lehrer. Richtig. Und wo steht der kleinere?

Schüler. Rechts.

Anmerk. Sollte den Schülern durch die blose Zeichnung die Anschauung von der Gleichheit, dem Größer- und Kleinerseyn zweyer Winkel noch nicht recht einleuchten wollen (wie dies bey einigen minder fähigen der Fall seyn könnte) so nehme der Lehrer vier etwa zwey Fuß lange, dünne Holzstäbchen, wovon je

zwey an ihren Enden charnierartig verbunden sind. Mit dieser einfachen Vorrichtung läßt sich nun recht deutlich zeigen, daß die Größe eines Winkels von der Größe der Oeffnung seiner Schenkel abhänge. Auch das Größer = und Kleinerseyn der Winkel springt hier sehr klar in die Augen.

Lehrer. Nun seht noch hierher (auf Unten deutend) und saget: was sind dies für zwey Winkel?

Schüler. Zwey spitze Winkel.

Lehrer. Sind sie gleich oder ungleich?

Schüler. Ungleich.

Lehrer. Richtig. Aber wo ist der größere?

Schüler. Rechts.

Lehrer. Wo der kleinere?

Schüler. Links.

(Nun wird die Tafel, nach und nach, in die drey andere Hauptstellungen gebracht, und in jeder Stellung nach dem größern und kleinern Winkel, oder nach den gleichen Winkeln gefragt. Wie diese Wiederholungsfragen zu geben sind, weiß der verständige Lehrer schon aus der frühern Anleitung und braucht hier nicht wiederhohlt zu werden.)

(Eben dieser Cyclus von Fragen wird an den Zeichnungen der Tafel 9 durchgeführt, und am Schlusse dieser Betrachtung muß der Schüler durch die blose Anschauung wissen, daß alle rechte Winkel einander gleich sind.

(Auf gleiche Weise wird die Tafel 10 behandelt und für den stumpfen Winkel durchgeführt.)

(Die Tafel 11 vergleichet: rechte, spitze und stumpfe Winkel unter sich selbst, und stellt je zwey davon zusammen. Sie giebt zu folgender Uebung Veranlassung.)

Lehrer. (Nachdem er sie aufgezeichnet und auf Oben gedeutet) Wie viele Winkel stehen hier?

Schüler. Zwey Winkel.

Lehrer. Wie heißt der zur Rechten stehende Winkel?

Schüler. Spitzer Winkel.

Lehrer. Und der zur Linken?

Schüler. Rechter Winkel.

Lehrer. Sind beyde Winkel gleich oder ungleich?

Schüler. Ungleich.

Lehrer. Aber ist der spitze Winkel größer oder kleiner als der rechte Winkel?

Schülek. Kleiner.

Lehrer. So ist es. Wenn ich Euch nun anstatt dieses spitzen Winkels (deutend) einen andern spitzen herzeichne. (thut dieses) Ist nun dieser spitze noch kleiner, als dieser rechte Winkel?

Schüler. Ja.

Lehrer. Ihr habt Recht. Wenn ich nun so fortfahre, immer andere und andere spitze Winkel für diesen zu zeichnen, und Euch immer frage: Ist der rechte Winkel größer oder kleiner als dieser spitze Winkel? Was werdet ihr antworten?

Schüler. { Der spitze Winkel ist kleiner.
Der rechte Winkel ist größer.

Lehrer. Recht so. Ist daher jeder rechte Winkel größer als jeder spitze Winkel?

Schüler. Ja.

Lehrer. Muß nicht jeder spitze Winkel kleiner als ein rechter Winkel seyn?

Schüler. Ja.

Lehrer. Ist ein spitzer Winkel so groß als der andere?

Schüler. Nein.

(Auf gleiche Art wird nun in dem mittlern Felde der Tafel der stumpfe Winkel mit dem rechten verglichen und zuletzt auf dem untern Felde der spitze mit dem stumpfen Winkel. Sodann folgen noch diese Schlußfragen.)

Lehrer. Wenn Ihr einen rechten Winkel und einen spitzen Winkel sehet: welcher ist der größere?

Schüler. Der rechte Winkel.

Lehrer. Welcher ist der kleinere von beyden?

Schüler. Der spitze Winkel.

Lehrer. Richtig. Aber wenn Ihr einen rechten und einen spitzen Winkel habt, wie nennt ihr den rechten Winkel in Vergleichung mit dem spitzen Winkel?

Schüler. Den größern.

Lehrer. Und wie heißt der spitze in Rücksicht des rechten Winkes?

Schüler. Der kleinere.

(Eben diese Fragen für den rechten und stumpfen Winkel, und sodann noch für den spitzen und stumpfen Winkel.)

Lehrer. Nun gebt wohl Acht, auf das, was ich Euch sage. Wenn Ihr einen stumpfen Winkel, einen rechten und einen spitzen sehet, welcher ist der größte von ihnen?

Schüler. der stumpfe Winkel.

Lehrer. Recht gut. Aber welcher ist der kleinste?

Schüler. Der spitze Winkel.

Lehrer. Wohl. Sagt nun auch, wie derjenige Winkel heißt, welcher kleiner, als der stumpfe, und größer als der spitze Winkel ist?

Schüler. Der rechte Winkel.

Lehrer. Recht so. Der rechte Winkel heißt also hier der mittlere, denn er stehet an Größe zwischen dem stumpfen und spitzen Winkel. Ist's nicht so?

Schüler. Ja.

Lehrer. Wenn ihr nun wieder einen stumpfen, einen rechten und einen spitzen Winkel sehet, wie nennt ihr den stumpfen?

Schüler. Den größten.

Lehrer. Wie heißt jetzt der spitze?

Schüler. Der kleinste.

Lehrer. Und wie nennt Ihr den rechten Winkel?

Schüler. Den mittlern.

(Es ist kaum nöthig, zu bemerken, daß der Lehrer, wenn er es bey seinen Schülern nöthig findet, die Tafel waagrecht stellen, in ihre drey Felder den stumpfen, rechten und spitzen Winkel verzeichnen, und seine Fragen, unter Leitung dieser Anschauungen, so lange wiederhohlen kann, bis Alles gehörig eingeübt ist.

Tafel 12.

(Der Zweck dieser zwölften Tafel ist, den Schüler aufmerksam zu machen, daß die Größe eines Winkels nicht in der Größe seiner Schenkel, sondern in der Größe der Oeffnung dieser Schenkel bestehe.)

Lehrer. (Nachdem er Nro. 12 auf die Tafel gezeichnet hat) Nun, Kinder! betrachtet einmal hier oben (deutend) den Winkel zur Rechten. Wie heißt er?

Schüler. Stumpfer Winkel.

Lehrer. Wie heißt der Winkel zur Linken hier? (deutend)

Schüler. Spitzer Winkel.

Lehrer. Gut. Welcher ist aber der größere von beyden?

Schüler. Der stumpfe Winkel.

Lehrer. Und der kleinere?

Schüler. Der spitze Winkel.

Lehrer. Wohl. Aber nun sagt mir auch: Haben beyde Winkel gleiche oder ungleiche Schenkel?

Schüler. Ungleiche Schenkel.

Lehrer. Welcher W. hat die größern Schenkel?

Schüler. Der spitze Winkel.

Lehrer. Und welcher hat die kleinern Schenkel?

Schüler. Der stumpfe Winkel.

Lehrer. Hat wohl hier (deutend) der größere Winkel auch größere Schenkel, als der kleinere Winkel?

Schüler. Nein.

Lehrer. Was für Schenkel hat denn der größere Winkel?

Schüler. Kleinere Schenkel.

Lehrer. Hat etwa dieser kleinere Winkel (deutend) auch kleinere Schenkel als der größere Winkel?

Schüler. Nein.

Lehrer. Welche Schenkel hat denn der kleinere Winkel?

Schüler. Größere Schenkel.

(Eine ähnliche Reihe von Fragen wird nun bey dem mittleren und untern Felde dieser Tafel durchgeführt; auch die Schultafel in andere Lagen versetzt. Die Schlußfrage ist folgende:)

Lehrer. Hängt also die Größe eines Winkels von der Größe seiner Schenkel ab, oder von der Große seiner Oefnung?

Schüler. Von der Größe seiner Oefnung.

Tafel 13 und 14.

(Diese Tafeln Nro. 13 und 14 dienen, um die Anschauungen von Neben- und Scheitelwinkeln klar zu machen, und der Unterricht nimmt folgenden Gang.)

Lehrer. Seither haben wir die Winkel theils einzeln, theils in Vergleichung zusammen betrachtet. Nun will ich Euch zeigen, auf welche Weise zwey oder vier Winkel ganz einfach zusammen verbunden sind. (Er zeichnet Nro. 13 an die Tafel und deutet in das obere Gefach) Sehet einmal her, ihr Kinder! betrachtet diese Linien genau, und sagt mir: sehet Ihr einen einzigen Winkel oder mehr als einen?

Schüler. Mehr als einen.

Lehrer. Wie viele Winkel stehen denn da?

Schüler. Zwey Winkel.

Lehrer. Richtig. Wie heißt der Winkel zur Rechten?

Schüler. Spitzer Winkel.

Lehrer. Und der zur Linken?

Schüler. Stumpfer Winkel.

Lehrer. Nun merket wohl, was ich sage: Solche Winkel, wie diese hier, welche an einer geraden Linie neben einander liegen, (deutend) heissen Nebenwinkel. Nun sagt mir Alle, wie nennt man diese Winkel?

Schüler. Nebenwinkel.

(Auf gleiche Weise werden diese Fragen in den Zeichnungen auf dem mittlern und untern Felde durchgeführt. Sodann wird die Schultafel in alle Hauptstellungen gebracht, und diese Uebung immer wiederholet. Bey dem wagrechten Stande der Tafel heißt der eine Winkel der untere, der andere der obere.)

Lehrer. (Der die Zeichnungen Nro. 14 auf die Tafel gebracht hat.) Nun, Kinder! betrachtet einmal diese Zeichnung (auf oben deutend) recht scharf, und sagt mir: wie viele Winkel Ihr rings um diesen Punkt (deutend) erblicket?

Schüler. Vier Winkel.

Lehrer. Recht so. Wie viele Winkel liegen oberhalb dieser Linie? (auf die wagrechte zeigend, und die untere mit dem Zeiger bedeckend.)

Schüler. Zwey Winkel.

Lehrer. Und wie viele sind unter derselben? (die obere bedeckend.)

Schüler. Auch zwey.

Lehrer. Wie heissen diese zwey obere Winkel zusammen?

Schüler. Nebenwinkel.

Lehrer. Richtig. Und die beyden untern zusammen?

Schüler. Auch Nebenwinkel.

(Eben so werden die Schüler auf die zwey Nebenwinkel zur Rechten, und auf die zwey Nebenwinkel zur Linken, geleitet.)

Lehrer. Wie viele Nebenwinkel sehet Ihr also hier an der Zeichnung?

Schüler. Vier Nebenwinkel.

Lehrer. Wohl. Sagt mir nun auch, wo sie stehen? Aber fanget dabey oben an, und gehet zur Rechten herum.

Schüler. Oben stehen zwey; zur Rechten stehen zwey; unten stehen zwey, und zur Linken stehen zwey.

Lehrer. So war's recht. Aber nun betrachtet einmal diesen spitzen Winkel, (oben rechts zeigend) schaut Euch überall um, und sagt mir: ob Ihr nicht einen andern gefunden habt, der ihm gleich ist?

Schüler. Ja.

Lehrer. Aber sagt mir auch: wo dieser andere stehet?

Schüler. Unten zur Linken.

Lehrer. Sehr gut. Nun betrachtet auch hier diesen stumpfen Winkel; (unten rechts deutend) suchet aufmerksam, und sagt mir: Ist noch ein stumpfer Winkel da?

Schüler. Jawohl.

Lehrer. Wo sehet ihr diesen andern?

Schüler. Oben zur Linken.

Lehrer. Recht gut. Nun bemerket auch wohl, was ich Euch sage. Von den vier Winkeln, welche rings um diesen Punkt (deutend) her liegen, nennt man diejenigen zwey, welche einander gleich sind, Scheitelwinkel; Sagt mir jetzt Alle: wie heissen diese beyden Winkel? (auf die spitzen zeigend.)

Schüler. Scheitelwinkel.

Lehrer. Und wie nennt man diese zwey stumpfe Winkel? (deutend.)

Schüler. Auch Scheitelwinkel.

Lehrer. Sind also die Scheitelwinkel einander gleich oder ungleich?

Schüler. Gleich.

(Diese Fragen werden nun an den Zeichnungen auf dem mittlern und untern Felde eben so durchgeführt, wobey der Lehrer sodann auch die Tafel in verschiedene Stellungen bringt. Den Beschluß dieser Betrachtung machen folgende Fragen:)

Lehrer. (Auf den spitzen Winkel zur Linken im obern Fache deutend.) Nun sagt mir, Kinder! wo ist von diesem Winkel der Scheitelwinkel?

Schüler. Rechts oben.

Lehrer. Gut. Und wo steht der Scheitelwinkel von diesem? (Rechts oben deutend.)

Schüler. Links unten.

Lehrer. (Setzt diese Fragen nach den zwey noch möglichen Fällen fort, und verbindet sodann die An-

schauung des Nebenwinkels mit der des Scheitelwinkels auf folgende Weise.) Betrachtet einmal diesen stumpfen Winkel, (links oben deutend) und sagt mir: wie viele Nebenwinkel hat er?

Schüler. Zwey Nebenwinkel.

Lehrer. Wo steht denn sein oberer Nebenwinkel?

Schüler. Zur Rechten.

Lehrer. Gut. Und wo der untere?

Schüler. Zur Linken.

(Auch diese Uebungen werden solange getrieben, bis dem Schüler Alles dieses geläufig ist.)

Tafel 15.

Lehrer. (Nachdem er die Zeichnung Nro. 15 auf die Tafel gebracht hat.) Jetzt, Kinder! wollen wir zwey gerade Linien noch auf eine andere Art betrachten. Seyd Ihr recht aufmerksam auf das, was Ihr sehen und von mir hören werdet, so steigen wir bald eine Stufe höher, nämlich zur Betrachtung von drey geraden Linien. Seht einmal diese zwey gerade Linien (oben deutend) an, und sagt mir: ob der Weg von diesem Ende (rechts deutend) zu diesem kürzer oder länger ist, als der Weg von diesem Ende (links deutend) zu diesem?

Schüler. Kürzer.

Lehrer. Sind also diese zwey gerade Linien an ihren Enden gleichweit, oder ungleichweit von einander entfernt?

Schüler. Ungleichweit.

Lehrer. An welchen Enden ist diese Entfernung kleiner; zur Rechten oder zur Linken?

Schüler. Zur Rechten.

Lehrer. Und wo ist die größere Entfernung dieser Enden?

Schüler. Zur Linken.

Lehrer. So ist es. Nun bildet Euch ein, ich mache beyde Linien gegen die Rechte größer, (verlängert sie wirklich um etwas) werden ihre Enden dadurch weiter von einander oder näher zusammenkommen, als sie zuvor waren?

Schüler. Näher zusammen.

Lehrer. Recht so. Und wenn ich diese Linien immer noch weiter fortziehe, (thut es wirklich, bis sie zusammenstoßen) werden sie einmal einander erreichen?

Schüler. Ja.

Lehrer. Nun merket wohl, was ich Euch sage. Solche gerade Linien, wie diese, (deutend) welche einmal zusammenstoßen, wenn man sie länger macht, heissen: Zusammenlaufende Linien. Wie heissen also diese zwey gerade Linien (deutend) weil sie einmal zusammenstoßen, wenn man sie zur Rechten größer macht?

Schüler. Zusammenlaufende Linien.

(Auf vollkommen ahnliche Weise werden die auseinanderlaufenden Linien, an den Enden zur Linken, aus der Anschauung entwickelt. Eben so auch die gleichlaufenden, als nicht zusammen- und nicht auseinanderlaufende Linien. Ist dieses nach den ver-

schiedenen Stellungen der Tafel durchgeführt, so wird noch Folgendes beygefügt:)

Lehrer. (Auf oben deutend) Nun könnt Ihr mir sicher folgende Fragen beantworten: Wenn diese Linien zur Rechten zusammenlaufende sind, was sind sie zur Linken?

Schüler. Auseinanderlaufende Linien.

Lehrer. Richtig. Wenn sie aber zur Rechten auseinanderlaufende sind, (auf Mitten) was sind sie zur Linken?

Lehrer. Zusammenlaufende Linien?

Lehrer. Wohl. Wenn aber gerade Linien zur Rechten verlängert gleichlaufnde sind, (auf unten) was sind sie zur Linken?

Schüler. Auch gleichlaufende Linien.

(Der Cyclus dieser Fragen wird nun auch bey der wagrechten Stellung der Tafel auf ähnliche Art wiederholet. Auch lassen sich noch folgende Fragen beyfügen. Wo sind die gleichlaufenden Linien? Wo die rechts zusammenlaufenden Linien? u. s. f. Auch umgekehrt: Was seht Ihr: unten; oben; rechts? u. s. w. Sobald der Lehrer in den Geist dieser Anschauungsmethode eingedrungen ist, bieten sich Ihm solche Abwechslungen von selbst dar.)

Anmerkung. Es bedarf kaum einer Erinnerung, daß es sehr nützlich ist, alle frühere Verbindungen von zwey geraden Linien wenigstens flüchtig zu wiederholen, ehe man zu den folgenden Uebungen schreitet.

Tafel 16, 17, 18, 19 und 20.

Lehrer. (Indem er Nro. 16 an die Tafel zeichnet) Da Ihr nun die nöthigsten Verbindungen von zwey geraden Linien kennet, so laßt uns zu etwas Neuem übergehen. Schaut einmal hieher (auf oben) und sagt mir: Wie viele Linien sind das?

Schüler. Drey.

Lehrer. Sind es gerade oder krumme Linien?

Schüler. Gerade Linien.

Lehrer. Sind sie gleich oder ungleich?

Schüler. Gleich.

Lehrer. Wie viele gerade Linien sehet Ihr hier? (auf Mitten.)

Schüler. Drey.

Lehrer. Sind sie alle drey einander gleich?

Schüler. Nein.

Lehrer. Sind ihrer zwey davon gleich?

Schüler. Ja.

Lehrer. Wo stehen diese zwey gleiche gerade Linien?

Schüler. Oben.

Lehrer. Wo ist die, ihnen nicht gleiche, gerade Linie?

Schüler. Unten.

Lehrer. Ist diese untere größer oder kleiner als jede der obern?

Schüler. Kleiner.

Lehrer. Wo ist denn also die kleinere Linie?

Schüler. Unten.

Lehrer. Und wo sind die zwey gleichen größern?

Schüler. Oben.

Lehrer. (Auf Unten deutend.) Wo ist hier die kleinere Linie?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Wo stehen die größern?

Schüler. Oben und Unten.

Lehrer. Ist die obere der untern gleich oder nicht?

Schüler. Gleich.

Lehrer. Was sehet Ihr also hier für Linien?

Schüler. Zwey gleiche und eine ungleiche.

(Die Ausführung dieser Uebungsfragen durch alle folgende Tafeln (17 — 20) ist hier zu weitläufig, und kann auch füglich der Leitung des sachkundigen Lehrers überlassen bleiben. Die Tafeln selbst deuten den Gang der Uebungen scharf genug an. Auch muß die Schultafel hierbey wieder gehörig gedrehet werden. Immer giebt es hier zwey Hauptfragen: 1) Das zu nennen, was Oben, Mitten und Unten, oder Rechts, Mitten und Links steht, und 2) zu sagen, wo diejenigen Linien an der Tafel stehen, welche der Lehrer nennet.

Tafel 21, 22 und 23.

(Der Zweck dieser Tafeln Nro. 21 — 23 ist, die Anschauung von drey gleichen geraden Linien sowohl, als von zwey gleichen und einer ungleichen, in ihrer Verbindung, zu Winkeln aufzuklären; dem Schüler zugleich auch die Benennung von den Arten und der Größe der Winkel, ihrer Schenkel und Scheitel zurückzurufen, und hierdurch fester zu begründen. Die Ausführung bleibt dem Lehrer überlassen.)

Lehrer. (Zeichnet Nro. 21 an die Tafel.) Hier, Kinder! (oben) seht Ihr drey gerade Linien, die mit zwey ihrer Enden (deutend) zusammenstoßen. Sagt mir zuerst: Sind sie gleich oder ungleich?

Schüler. Gleich.

Lehrer. Wie viele Winkel bilden diese drey gerade Linien?

Schüler. Zwey Winkel.

Lehrer. Recht so. Sind diese Winkel stumpfe, rechte oder spitze?

Schüler. Stumpfe Winkel.

Lehrer. Wie nennt Ihr diese zwey gerade Linien, (deutend) die den Winkel zur Rechten bilden?

Schüler. Die Schenkel.

Lehrer. Wie dieses? (auf den Scheitel deutend)

Schüler. Scheitel.

(Eben dieses für den Winkel zur Linken.)

Lehrer. (Auf Mitten) Nun sagt mir hier: Sind diese drey Linien gleich oder ungleich?

Schüler. Ungleich.

Lehrer. Wo ist die kleinere?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Sind die beyden andern gleich oder ungleich?

Schüler. Gleich.

Lehrer. Wie viele Winkel bilden diese drey Linien?

Schüler. Zwey Winkel.

(Und so weiter wie vorhin.)

Lehrer. Wo sind die zwey gleichen Linien?

Schüler. Zur Rechten und zur Linken.

(Der Lehrer schreitet nun nach ähnlichem Gange fort, giebt der Tafel verschiedene Stellungen, und läßt bey Nro. 22 und 23 vorzüglich auch die größere und kleinere Winkel benennen.

Tafel 24, 25, 26 und 27.

(Diese Tafeln Nro. 24 — 27, dienen zur Unterscheidung und Benennung von drey geraden getrennten Linien, welche alle an Größe verschieden sind. Der Gang des Unterrichtes ist folgender, und bedarf hier nur einer Andeutung.)

Lehrer. Seht einmal her, Kinder! (nachdem er Nro. 24 aufgezeichnet hat, auf Oben deutend) und betrachtet aufmerksam diese drey gerade Linien. Wo ist die größte?

Schüler. Oben.

Lehrer. Gut. Und wo steht die kleinste?

Schüler. Unten.

Lehrer. Auch recht. Nun betrachtet diese hier (deutend in der Mitte). Ist sie größer oder kleiner, als die obere? (deutend.)

Schüler. Kleiner.

Lehrer. Ist sie größer oder kleiner, als diese untere? (deutend.).

Schüler. Größer.

Lehrer. So ist's Recht. Nun präget Euch ein, was ich sage. Diese Linie (deutend) heißt die mittlere, aber nicht deshalb, weil sie hier mitten steht, sondern weil sie eine mittlere Größe hat, in Vergleich

mit dieser größten (deutend).und mit dieser (deutend) kleinsten. Nun sagt mir sogleich wieder: wie heißt diese Linie? (auf die obere deutend.)

Schüler. Die größte.

Lehrer. Wie diese? (auf die mittlere zeigend.)

Schüler. Die mittlere.

Lehrer. Und wie wird diese genennt? (die untere deutend.)

Schüler. Die kleinste.

Lehrer. (Auf Mitten deutend) Nun schaut hierher und sagt: wo steht die größte Linie?

Schüler. Oben.

Lehrer. Wo ist die mittlere?

Schüler. Unten.

Lehrer. Und wo erblicket Ihr die kleinste?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Sehr richtig. Aber wie heißt nun diese? (auf die untere deutend.)

Schüler. Die mittlere.

Lehrer. Wie nennt Ihr diese hier? (auf die obere deutend.)

Schüler. Die größte.

Lehrer. Und wie diese? (auf die mittlere zeig.)

Schüler. Die kleinste.

(Nach diesem Muster wird diese Uebung durch alle Tafeln und bey allen Stellungen der Schultafel durchgeführt. Zum Schlusse mögen die Schüler Alle, jede einzelne Tafel, mit vernehmlicher Stimme von Oben nach Unten durchgehen; z. B. Nro= 25, Links die größte Linie, Mitien die mittlere Linie, Rechts die

kleinste Linie. — Links die mittlere Linie, Mitten die größte Linie, Rechts die kleinste Linie. — Links die größte Linie, Mitten die kleinste Linie, Rechts die mittlere Linie. — Dergleichen Uebungen können mit mehrern andern Tafeln vorgenommen werden, und sind sehr lehrreich und bildend für das Anschauungsvermögen.

Tafel 28, 29, 30 und 31.

(Der Zweck dieser Tafeln Nro. 28—31, ist die Betrachtung dreyer ungleichen geraden Linien in ihren Verbindungen zur Bildung zweyer Winkel, und hierdurch die Anschauung des Dreyecks (wie Nro. 31 zeiget) allmählig vorzubereiten. Aus diesem Zwecke ergiebt sich der Cyclus der Uebungsfragen. Doch wollen wir kürzlich ihren Gang andeuten.)

Lehrer. (Zeichnet Nro 28 auf die Tafel und spricht:) Sehet hierher, Kinder! (Oben) und sagt mir: Wie viele gerade Linien sehet Ihr?

Schüler. Drey.

Lehrer. Sind sie gleich oder ungleich?

Schüler. Ungleich.

Lehrer. Wie heißt diese zur Linken stehende? (deutend.)

Schüler. Die größte.

Lehrer. Die Mitten stehende? (deutend.)

Schüler. Die mittlere.

Lehrer. Und diese zur Rechten hier? (deutend.)

Schüler. Die kleinste.

Lehrer. Wie viele Winkel bilden diese drey Lin.?

Schüler. Zwey.

(Nun folgen Fragen über die Art dieser Winkel, über Schenkel und Scheitel. Sodann werden diese Uebungen durch alle Tafeln auf gleiche Weise fortgeführt, und die Stellung der Schultafel dabey öfters verändert. Zum Schlusse noch dieses:)

Lehrer. (Zeichnet Nro 29, und deutet auf Oben) von welchen Linien wird dieser rechte Winkel gebildet?

Schüler. Von der größten und kleinsten. (Einige Schület können auch sagen: von der kleinsten und größten, was hier einerley ist.)

Lehrer. Welche Linien bilden diesen spitzen Winkel? (deutend.)

Schüler. Die größte und mittlere.

(Solche Uebungen werden nun auch noch über mehrere Tafeln angestellt.)

Tafel 32.

(Der Zweck dieser Tafel Nro. 32 ist, die Anschauung des gleichseitigen gleichschenkelichen, und ungleichseitigen Dreyecks klar zu machen und tief einzuprägen, was nun nicht mehr schwer ist, da die Kenntniß von Seiten und Winkel vorhergegangen.)

Lehrer. (Nachdem Nro. 32 gezeichnet ist, auf Oben deutend) Hier, Kinder! will ich Euch etwas Neues lehren. Betrachtet diese Zeichnung sehr aufmerksam und sagt mir: Wie viele gerade Linien sehet Ihr hier?

Schüler. Drey gerade Linien.

Lehrer. Das ist klar. Aber sind sie alle drey einander gleich oder nicht?

Schüler. Sie sind alle drey gleich.

Lehrer. Wie viele Winkel bilden diese drey Linien an ihren Enden, mit welchen sie zusammenstoßen?

Schüler. Drey Winkel.

Lehrer. Recht so. Nun betrachtet diese drey Winkel unter sich, und saget mir: Erscheinen sie Euch alle gleich oder ungleich?

Schüler. Gleich.

Lehrer. Richtig. Jetzt merket was ich Euch sage. Da diese Zeichnung drey Winkel hat, (deutend) jeder Winkel aber eine Ecke bildet, wenn man um alle drey Linien herumgehen wollte, so nennt man das, was ihr hier sehet, ein Dreyeck. Diese drey Linien, welche das Dreyeck bilden, heißen die Seiten des Dreyecks, und, weil hier alle drey Seiten (deutend) einander gleich sind, so heißt es: ein gleichseitiges Dreyeck. Nun wiederholet mir Alle: Wie nennt man dies?

Schüler. Ein gleichseitiges Dreyeck.

Lehrer. Warum heißt Ihr aber diese Zeichnung ein Dreyeck?

Schüler. Weil sie drey Ecken hat.

Lehrer. Wo steht diese Ecke? (die Spitze deut.)

Schüler. Oben.

Lehrer. Wo diese? (rechts deutend.)

Schüler. Zur Rechten.

Lehrer. Und wo seht Ihr diese? (links zeigend.)

Schüler. Zur Linken.

Lehrer. Wie nennt Ihr diese drey Linien, welche das Dreyeck bilden?

Schüler. Die Seiten des Dreyecks.

Lehrer. Wie viele Seiten hat also dieses Dreyeck?

Schüler. Drey Seiten.

Lehrer. Warum nennen wir aber dieses Dreyeck ein gleichseitiges Dreyeck?

Schüler. Weil es lauter gleiche Seiten hat.

Lehrer. So ist's Recht. Wo steht diese Seite? (rechts deutend.)

Schüler. Zur Rechten.

Lehrer. Wo befindet sich diese? (unten deutend)

Schüler. Unten.

Lehrer. Und wo erblickt Ihr diese Seite? (links deutend.)

Schüler. Zur Linken.

(Diese Fragen werden nun so lange wiederholet, bis den Schülern Alles Gesagte klar und geläufig geworden ist.)

Lehrer. (Auf Mitten deutend) Sehet nun hierher und sagt mir: Wie viele Ecken hat diese Zeichnung?

Schüler. Drey Ecken.

Lehrer. Wie nennt Ihr sie also?

Schüler. Ein Dreyeck.

Lehrer. So ist's. Wie viele Seiten hat denn dieses Dreyeck?

Schüler. Drey Seiten.

(Die Lage dieser Ecken und Seiten wird nun wie vorhin bestimmt.)

Lehrer. Betrachtet nun einmal diese zwey Seiten (auf die gleichen Schenkel deutend) recht genau, und sagt mir: Sind sie gleich oder ungleich?

Schüler. Sie sind gleich.

Lehrer. Aber ist jede, dieser gleichen Seiten, dieser untern auch gleich, oder ungleich?

Schüler. Ungleich.

Lehrer. Wie viele gleiche Seiten hat also dieses Dreyeck?

Schüler. Zwey gleiche Seiten.

Lehrer. Richtig. Nun merket Euch wieder ein neues Wort, was ich Euch nenne. Ein Dreyeck, welches zwey gleiche Seiten hat, (deutend) heißt: Ein gleichschenkeliges Dreyeck, und seine zwey gleiche Seiten heissen: Die gleichen Schenkel. Sagt mir nun schnell Alle: Wie heißt dieses Dreyeck? (deutend)

Schüler. Gleichschenkeliges Dreyeck.

Lehrer. Und wie nennt Ihr diese zwey gleiche Seiten?

Schüler. Die gleichen Schenkel.

Lehrer. Gut. Warum heißt aber dieses Dreyeck ein gleichschenkeliges?

Schüler. Weil es zwey gleiche Seiten hat.

Lehrer. Recht so. Allein nun müßt Ihr Euch noch etwas merken. Seht her, diese Seite des gleichschenkeligen Dreyecks (deutend) welche diesen beyden andern (deutend) ungleich ist, heißt: Die Grundlinie des gleichschenkeligen Dreyecks, und der Scheitel dieses Winkels, (deutend) welcher der Grundlinie gegenüber steht, heißt: die Spitze des gleichschenkeli-

gen Dreyecks. Sagt mir nun wieder: Wie nennt man diese Seite im gleichschenkeligen Dreyecke? (deut.)

Schüler. Grundlinie.

Lehrer. Und wie heißt dieser Scheitel?

Schüler. Die Spitze.

Lehrer. Wenn Ihr diese Grundlinie (deutend) betrachtet, so sehet Ihr, daß sich ein Winkel an ihrem Ende zur Rechten, und eben so ein Winkel an ihrem Ende, zur Linken befindet. (deutend) Sehet einmal wohl zu, ob diese zwey Winkel einander gleich sind, oder ungleich?

Schüler. Sie sind gleich.

Lehrer. Ihr habt Recht. Diese zwey Winkel haben auch ihren Namen. Sie heissen: die Winkel an der Grundlinie. Wie heissen diese zwey Winkel?

Schüler. Winkel an der Grundlinie.

(Jetzt folgen über diese neue Anschauungen im gleichschenkeligen Dreyecke die Uebungsfragen auf die, jedem verständigen Lehrer bekannte, Weise. Die Uebung ist wieder von doppelter Art. Die Schüler müssen die, sich neu erworbenen, Anschauungen richtig benennen, und sodann wieder diese, mit Worten ausgesprochenen, Anschauungen nach ihrer Lage zu bestimmen wissen.)

Lehrer. (Auf Unten deutend) Wie nennt Ihr das, was ich daher gezeichnet habe?

Schüler. Dreyeck.

Lehrer. Warum nennt Ihr es Dreyeck?

Schüler. Weil es drey Ecken hat.

Lehrer. So ist es. Nun betrachtet abermal seine drey Seiten, und sagt mir: Wo ist die kleinste?

Schüler. Zur Linken.

Lehrer. Wo die mittlere?

Schüler. Zur Rechten.

Lehrer. Und wo die größte?

Schüler. Unten.

Lehrer. Recht so. Sind also diese drey Seieen unter sich gleich oder ungleich?

Schüler. Ungleich.

Lehrer. Nun bemerket, was ich Euch sage. Ein Dreyeck, dessen drey Seiten einander ungleich sind, heißt: Ein ungleichseitiges Dreyeck. Sagt mir nun Alle: Wie nennt Ihr dieses Dreyeck? (deutend)

Schüler. Ungleichseitiges Dreyeck.

Lehrer. Warum nennt Ihr es so?

Schüler. Weil es lauter ungleiche Seiten hat.

(Alles dieses wird nun noch, bey verschiedenem Stande der Schultafel, so lange wiederholet, als es dem einsichtsvollen Lehrer nöthig scheint.)

Tafel. 33 und 34.

(An diesen Tafeln Nro. 33 und 34 wird das rechtwinkelige, spitz- und stumpfwinkelige Dreyeck zur klaren Anschauung des Schülers gebracht. Der Gang des Unterrichter ist dieser:)

Lehrer. (Zeichnet Nro. 33, und deutet auf Oben) Wie nennt Ihr diese Zeichnung?

Schüler. Dreyeck.

Lehrer. Richtig. Wir wollen aber nun nicht, wie vorhin, auf die Seiten dieses Dreyecks sehen, sondern einmal seine Winkel betrachten. Da sagt mir nun sogleich: Wie heißt dieser Winkel? (rechts deut.)

Schüler. Ein spitzer Winkel.

Lehrer. Und wie nennt Ihr diesen? (Oben deut.)

Schüler. Auch einen spitzen Winkel.

Lehrer. Aber was ist das hier für ein Winkel? (links deutend)

Schüler. Ein rechter Winkel.

Lehrer. Was für Winkel befinden sich also in diesem Dreyecke?

Schüler. Zwey spitze Winkel, und ein rechter Winkel.

Lehrer. Nun gebt Acht. Ein Dreyeck, worinn sich zwey spitze Winkel und ein rechter befinden, heißt: Ein rechtwinkeliges Dreyeck. Nun sagt es Alle: Wie heißt dieses Dreyeck?

Schüler. Ein rechtwinkeliges Dreyeck.

Lehrer. Wohl. Aber warum nennt Ihr es so?

Schüler. Weil es einen rechten, Winkel und zwey spitze Winkel hat.

Lehrer. Betrachtet jetzt einmal die drey Seiten dieses Dreyecks, und sagt mir: Wo ist die größte?

Schüler. Zur Rechten.

Lehrer. Richtig. Nun bemerket auch noch, daß man diese (deutend) größte Seite im rechtwinkeligen Dreyecke die Hypotenuse nennt. Sprecht mir nun geschwinde nach. Wie heißt diese größte Seite im rechtwinkeligen Dreyecke?

Schüler. Hypotenuse.

Lehrer. Welche Seite des rechtwinkeligen Dreyecks heißt Ihr Hypotenuse?

Schüler. Die größte Seite.

Lehrer. Nun merket ferner. Diese beyden Seiten (deutend) des rechtwinkeligen Dreyecks, welche den rechten Winkel bilden, heissen: Die Catheten. — Wie nennt man diese Seiten?

Schüler. Die Catheten.

Lehrer. Welche Seiten des rechtwinkeligen Dreyecks heißen: Die Catheten?

Schüler. Jene zwey, welche den rechten Winkel bilden.

(Diese Fragen werden nun, auf bekannte Weise, wiederholet. Auf gleiche Art kläret der Lehrer sodann die Anschauung des spitz- und stumpfwinkelichen Dreyecks (Mitten und Unten) auf. Diese Uebungen werden in Nro. 34 fortgesetzt. Auch verändert der Lehrer öfters die Lage der Tafel, und folget in seinen Entwickelungen immer der, schon öfters bemerkten, doppelten Methode.)

Tafel 35, 36, 37, 38 und 39.

(Diese Tafeln Nro 35 — 39 haben die Bestimmung, die Anschauung der Vierecke, und ihrer Gattungen dem Schüler einzuprägen.)

Lehrer. (Hat Nro. 35 gezeichnet) Heute, Kinder! wollen wir einen großen Schritt weiter thun. Wir verlassen die seither betrachteten Dreyecke, und gehen zu den Verbindungen von vier geraden Linien. Betrachtet nun einmal diese (deutend) Zeichnung und sagt mir sogleich: Wie viele Winkel oder Ecken hat solche?

Schüler. Vier Ecken.

Lehrer. Richtig. Wenn wir nun früher, eine Zeichnung mit drey Ecken, ein Dreyeck genannt haben, wie werdet Ihr diese Zeichnung mit vier Ecken nennen?

Schüler. Viereck.

Lehrer. Getroffen. Betrachtet jetzt auch diese Zeichnungen. (auf Mitten und Unten) Wie müßt ihr diese heissen?

Schüler. Auch Vierecke.

Lehrer. So ist es. Aber nun sehet wieder daher (Oben) und sagt mir: Was sind denn das für Winkel? (auf alle vier deutend)

Schüler. Rechte Winkel.

Lehrer. Nun betrachtet auch diese vier Seiten, und sagt mir: Sind alle gleich oder nicht?

Schüler. Sie sind alle gleich.

Lehrer. Jetzt behaltet auch das Wort, womit man dieses Viereck bezeichnet; es heißt: Ein Quadrat. — Wie heißt dieses Viereck?

Schüler. Ein Quadrat.

(Nun folgen die Fragen: Wie viele Ecken oder Winkel hat ein Quadrat? Wie viele Seiten? Sind die Winkel gleich, oder ungleich? Sind die Seiten gleich oder ungleich?)

(Auf gleiche Weise wird nun auch das Rechteck, mit Rücksicht, auf gegenüberstehende gleiche Seiten; die Raute, mit Bemerken der stumpfen und spitzen Winkel, und die Rhomboide; in Bezug auf gleiche Seiten und gleiche Winkel, behandelt.)

(Ist dieses durchgeführt, so folgen die Fragen: Was steht (Tafel 35) Oben, Unten, Mitten? und (bey gedrehter Tafel) Rechts, Links, Mitten?)

Lehrer. (Nachdem Nro. 36 gezeichnet ist) Betrachtet einmal diese Rhomboide (deutend) und sagt mir: Ob diese obere Linie und diese untere Linie (zeigend) gleichlaufend sind, oder nicht?

Schüler. Gleichlaufend.

Anmerk. Sollten dieß die Schüler nicht sogleich übersehen, so muß der Lehrer sie wieder darauf führen.

Lehrer. Eben so ist auch diese (rechts und links deutend) mit dieser gleichlaufend. Nun sehet einmal daher (Mitten) und saget: Ob diese obere Linie mit dieser untern gleichlaufend ist?

Schüler. Ja.

Lehrer. Ist auch diese zur Rechten, mit jener zur Linken, gleichlaufend?

Schüler. Nein.

Lehrer. Gut. Nun bemerkt Euch auch ein neues Wort: Dieses Viereck, worin nur diese eine Seite (deutend) mit der ihr gegenüberstehenden gleichlaufend ist, heißt: Ein Paralleltrapez. Nun wiederholet Alle dieses Wort?

Schüler. Paralleltrapez.

(Der Lehrer läßt dieses etwas schwer zu nennende Wort noch mehrmals von den Schülern nennen, bis es ihnen geläufig ist.)

Lehrer. Jetzt muß ich Euch noch ein Viereck benennen, das hier unten (deutend) stehet. Ihr erkennet es daran, daß keine Seite mit der ihr gegenüberstehenden gleichlaufend ist. Sehet selbst und antwortet; ist diese obere Seite (deutend) mit dieser untern gleichlaufend?

Schüler. Nein.

Lehrer. Ist diese zur Rechten (deutend) mit dieser zur Linken gleichlaufend?

Schüler. Nein.

Lehrer. Nun gut. Jetzt merket Euch auch die Benennung dieses Vierecks. Es heißt: Trapez. — Wie nennt man dieses Viereck? (deutend)

Schüler. Trapez.

(Auch dieses Wort muß mehrmal wiederholet werden, bis es geläufig ist.)

(Diese sechserley Benennungen der Vierecke werden nun, nach obiger Anleitung, an den Tafeln Nro. 37 und 38 gehörig durchgeführt, und die Schultafel in mancherley verschiedene Lagen gestellt. Zur Wiederholung, kann der Lehrer sodann die drey Felder dieser Tafel, durch eine mitten durchgezogene gerade Linie, in sechs Gefache theilen, und die sechserley Vierecke hineinziehen. Jetzt stehen sie den Schülern alle vor Augen, und durch schickliche Fragen werden sie sich ihre Anschauung vollkommen klar machen.)

Lehrer. (Zeichnet Nro 39 auf die Tafel) Zum Schlusse von den Vierecken muß ich Euch noch eine Linie lehren, die in der Folge merkwürdig ist. Seht her (auf Oben deutend) diese gerade Linie im Vierecke, welche von diesem Scheitel bis zu diesem entgegenstehenden (deutend) gezogen wird, nennt man: Eine Diagonallinie. Nennt mir nun sogleich Alle dieses Wort?

Schüler. Diagonallinie. (Wird öfters wiederholet.)

Lehrer. In dem Vierecke hier (Mitten) ist diese Linie (deutend) auch eine Diagonallinie? Denn es ist einerley, ob sie von der Rechten zur Linken (auf Oben deutend) wie vorhin; oder von der Linken zur Rechten (auf Mitten) wie hier gezogen wird. Nun betrachtet diese gerade Linie aufmerksam (Unten) und sagt mir, wie heißt sie?

Schüler. Diagonallinie.

Lehrer. Gut. Nun sehet wieder hierher (Oben) und sagt mir: Wie heißt das, was unterhalb dieser Diagonallinie liegt? (den Umfang dieses Dreyecks deutend)

Schüler. Ein Dreyeck.

Lehrer. Richtig. Und was liegt oberhalb dieser Diagonallinie hier? (ebenfalls deutend)

Schüler. Auch ein Dreyeck. (Eben dieses bey Mitten und Unten.)

Lehrer. In was für Theile theilet also die Diagonallinie jedes Viereck?

Schüler. In zwey Dreyecke.

Tafel 40 und 41.

(Diese Tafeln begründen die Anschauungen des Fünf-, Sechs- und Siebeneckes.)

Lehrer. (Zeichnet zuerst Nro. 40) Heute, Kinder! sollt Ihr wieder einen Schritt weiter gehen. Betrachtet einmal diese Zeichnung, (Oben) und sagt mir sodann: Wie viele Winkel oder Ecken hat sie?

Schüler. Fünf Ecken.

Lehrer. Richtig. Besinnt Euch ein wenig und sagt mir: Wie nennt Ihr das?

Schüler. Fünfeck.

Lehrer. So ist's Recht. Zählet nun auch die Seiten dieses Fünfecks und sagt: wie viele sind es?

Schüler. Auch fünf.

Lehrer. Betrachtet diese fünf Seiten genauer, und sprecht: Sind sie alle einander gleich oder nicht? (darauf deutend)

Schüler. Sie sind alle gleich.

Lehrer. Nun sehet her auf diese fünf Winkel. (deutend) Sind sie sich alle gleich oder nicht?

Schüler. Sie sind auch gleich.

Lehrer. Ein Fünfeck, wie dieses, welches fünf gleiche Seiten, und fünf gleiche Winkel hat, heißt: Ein regelmäßiges Fünfeck. Wie nennt ihr daher dieses Fünfeck.

Schüler. Ein regelmäßiges Fünfeck.

(Der Lehrer drehet uun allmählig die Tafel herum, und zeiget, indem jede Seite des Fünfecks unten ist, daß es diesen fünferley Lagen dasselbige Ansehen hat.)

(Durch einen ähnlichen Cyclus von Fragen bildet sich der Schüler die Anschauung vom regelmäßigen Sechsecke und Siebenecke.)

(Da durch eben diese Reihenfolge von Fragen, auch die Anschauung des unregelmäßigen Fünf-, Sechs- und Siebenecks auf Nro. 41 deutlich wird, indem der Lehrer hier nur auf die ungleichen Seiten und ungleichen Winkel aufmerksam macht, so bedarf auch dies hier keiner weitern Entwickelung. Es ist zu rathen,

daß Nro 41 in verschiedenen Lagen der Schultafel betrachtet werde.)

Tafel 42, 43, 44, 45 und 46.

(Diese Tafeln Nro. 42 — 46 beziehen sich auf den Kreis, und einige damit verbundene Elementaranschauungen.)

Lehrer. (Nachdem Nro. 42 gezeichnet ist) Bisher, Kinder! haben wir nur die Verbindungen von geraden Linien betrachtet. Jetzt wollen wir eine krumme Linie kennen lernen, welche dem Auge wohlgefällig ist, und deren Kenntniß Euch, in der Folge, sehr nützlich seyn wird. Betrachtet einmal hier (oben deutend) diese überall gleichgebogene, krumme Linie recht aufmerksam, und merkt Euch ihren Namen. Sie heißt Kreislinie, und dieser Punkt (deutend) den Ihr in ihrer Mitte erblickt, ist ihr Mittelpunkt. Nun wiederholet es Alle: Wie nennt ihr diese krumme Linie? (deutend.)

Schüler. Kreislinie.

Lehrer. Und diesen Punkt? (deutend.)

Schüler. Mittelpunkt.

Lehrer. Richtig. Nun weiter. Diese gerade Linie hier (mitten deutend) von dem Mittelpunkte, bis zur Kreislinie hin, ist der Halbmesser; und diese größere gerade Linie (unten) durch den Mittelpunkt zu beyden Seiten der Kreislinie, heißt: Der Durchmesser. Nun sagt mir, wie heißt diese gerade Linie? (mitten.)

Schüler. Halbmesser.

Lehrer. Und wie nennt ihr diese? (unten.)

Schüler. Durchmesser.

Lehrer. So ist es. Nun sagt mir, wo ist die Kreislinie?

Schüler. Oben.

Lehrer. Wo der Mittelpunkt?

Schüler. In ihrer Mitte.

Lehrer. Wo sehet ihr den Durchmesser?

Schüler. Unten.

Lehrer. Wo ist der Halbmesser?

Schüler. Mitten.

(Diese Uebungen werden nun auch bey umgedrehter Tafel wiederholend ausgeführt.)

Lehrer. Nun merket ferner (nachdem Nro. 43 verzeichnet ist, auf oben deutend) eine gerade Linie wie diese, welche die Kreislinie beyderseits berühret, ohne durch ihren Mittelpunkt zu gehen, heißt: Sehne. — Merket Euch das, und sagt mir nun schnell wieder: Wie nennt man diese gerade Linie?

Schüler. Sehne heißt sie.

Lehrer. Vergesset dies nicht mehr. Betrachtet diesen Durchmesser (mitten) und sagt: Ist dieses obere Stück der Kreislinie (deutend) diesem untern gleich oder nicht?

Schüler. Es ist ihm gleich.

Lehrer. Dasjenige, was zwischen diesem Halbmesser (deutend) und dieser obern halben Kreislinie liegt, heißt: Der obere Halbkreis. Dasjenige aber, was Ihr zwischen diesem Halbmesser und dieser untern Kreislinie (deutend) erblicket, heißt der untere

Halbkreis. Sagt mir nun schnell: Wie nennt man dieses? (deutend auf oben.)

Schüler. Den obern Halbkreis. (Eben so mit dem untern Halbkreise, und dann bey wagrechtem Stande der Tafel, mit dem Halbkreise zur Rechten und zur Linken.)

Lehrer. Jetzt sehet hierher. Wenn diese zwey Halbmesser (unten) einen rechten Winkel bilden, so nennt man das, was zwischen ihnen und dieser krummen Linie liegt, den Quadranten. Nun sagt wieder: Wie nennt man dieß? (deutend.)

Schüler. Einen Quadranten.

(Nun folgen die bekannten Wiederholungen dieser Tafel.)

Lehrer. (Zeichnet Nro. 44 und deutet auf oben) Diese gerade Linie hier ausserhalb des Kreises, welche die Kreislinie nur an dieser einen Stelle berühret, heißt: Eine Tangente. Wiederholet mir nun Alle dieses Wort und sagt: Wie nennt man diese gerade Linie hier?

Schüler. Tangente.

Lehrer. Zur Wiederholung sagt mir auch noch: Wie heißt jede von diesen zwey Linien in der Kreislinie? (deutend.)

Schüler. Eine Sehne.

Lehrer. Da nun hier diese untere größer ist, als die obere, wie nennt Ihr diese untere?

Schüler. Die größere Sehne.

Lehrer. Und diese hier? (deutend.)

Schüler. Die kleinere Sehne.

Lehrer. Das, was hier (auf Mitten deutend) zwischen diesen zwey Halbmessern und dieser krummen Linie liegt, heißt: Ein Ausschnitt; und das, was Ihr hier (auf Unten deutend) zwischen dieser Sehne und dieser krummen Linie erblicket, wird ein Abschnitt genennt. Nun sagt mir Alle: Wie heißt dieses? (Mitten)

Schüler. Ausschnitt.

Lehrer. Und wie dieses? (Unten und an den Grenzlinien herumfrahrend)

Schüler. Abschnitt.

(Nun folgen die Wiederholungsfragen auf die bekannte Weise, und in verschiedenen Stellungen der Tafel.)

Lehrer. (Nachdem er Nro. 45 gezeichnet und auf Oben gedeutet hat) Was seht Ihr hier? (auf die Kreislinie deutend)

Schüler. Einen Kreis.

Lehrer. Gut. Aber was erblickt Ihr in diesem Kreise? (deutend)

Schüler. Ein Dreyeck.

Lehrer. So ist es. Nun merkt Euch dieses. Wenn ein Dreyeck mit seinen drey Winkelspitzen (deutend) in der Kreislinie liegt, so heißt das Dreyeck ein eingeschriebenes, und der Kreis, weil er um das Dreyeck gezeichnet ist, der umschriebene Kreis. Nun wiederholet mir diese Worte. Wie heißt Ihr dieses Dreyeck in Rücksicht auf diesen Kreis?

Schüler. Ein eingeschriebenes Dreyeck.

Lehrer. Und wie nennt Ihr diesen Kreis in Rücksicht auf dieses Dreyeck? (deutend)

Schüler. Einen umschriebenen Kreis.

Lehrer. (Auf irgend eine Seite des Dreyecks deutend) Wie nennt Ihr diese gerade Linie in Rücksicht auf diesen Kreis?

Schüler. Eine Sehne.

Lehrer. Und das, was zwischen dieser Sehne und dieser krummen Linie liegt? (deutend)

Schüler. Abschnitt.

(Auf eben diese Art werden nun die fünf übrigen Zeichnungen auf Nro. 45 — 46 durchgenommen. Hierauf folgen die gewöhnlichen Wiederholungen, und diese wieder, bey verschiedener Stellung der Tafel.)

Schlußbemerkung.

Bey dem Unterrichte dieses ersten Cursus mache es sich der Lehrer vorzüglich zum Gesetze, durchaus nicht eher etwas Neues vorzunehmen, bis das Frühere mit größter Klarheit eingeübt und gefaßt worden ist. Auch stelle Er fleißige Wiederholungen an; besonders wenn irgend ein Hauptabschnitt beendiget wird. Ueberhaupt wird sich der verständige, mit dem Geiste dieser Methode vertraute, Lehrer immer nach dem Bedürfnisse seiner Schüler richten. Auch muß dieser ganze erste Cursus nochmals, wenigstens nach seinen Hauptmomenten, wiederholet werden, ehe man zum zweyten schreitet.

Der

Geometrischen Anschauungslehre

Zweyter Cursus.

Zweyter Cursus.

Tafel 47.

Oben. Zur Bezeichnung des Punktes bedienet man sich eines kleinen lateinischen Buchstabens, welcher ihm zur Seite gesetzt wird. Dieses Mittel ist einfach und bequem, mehrere Punkte von einander zu unterscheiden. Will man daher, von den hier stehenden vier Punkten, jenen benennen, welcher oben zur Linken steht, so heißt dieser: Punkt a. Der oben rechts stehende heißt: Punkt b. Unten rechts steht der Punkt d, und links der Punkt c. Ob diese Buchstaben die kleinen oder die großen des lateinischen Alphabets sind, und, ob man die ersteren, oder die letzteren wählet, ist an sich einerley; doch fängt man meist mit a, b, c u. s. f. an.

Mitten. Jede gerade Linie wird mit zwey Buchstaben bezeichnet, wovon jeder an eines ihrer Enden gesetzt wird. Hieraus ist nun verständlich, was man die gerade Linie ab, die gerade Linie cd, und die gerade Linie fg nennet. Der Anfang der geraden Linie ab bey a heißt: Anfangspunkt, ihr Ende bey b der Endpunkt derselben. Diese Linie kann aber auch bey b anfangen, und dann ist ihr Ende bey a. Nun heißt b der Anfangspunkt, und a ihr Endpunkt. Eben dieses gilt für den Anfangspunkt und Endpunkt

der geraden Linie cd und fg. Auch ist es einerley, ob man sagt: Linie ab, oder: Linie ba. Doch mag man sich an die Ordnung des a, b, c gewöhnen.

Unten. Krumme Linien werden durch mehr als zwey Buchstaben benennet. Um hier die obere zu bezeichnen, setzt man einige Buchstaben, b und c, zwischen den Anfangspunkt a und den Endpunkt d, an mehreren Stellen ihrer Krümmung, und sagt nun: Linie abcd, oder auch: Linie dcba. Wie viele Buchstaben hierzu erforderlich sind, hängt von der Länge und Krümmung der Linie selbst ab. Die untere kann mit drey Buchstaben fgh, oder auch: hgf bezeichnet werden.

Anmerkung. Die sich aus diesen Erklärungen ergebenden Uebungs- und Wiederholungsfragen bleiben dem verständigen Lehrer überlassen. Wie solche gestellt werden müssen, ist demselben bereits aus dem ersten Cursus geläufig. Daher begnügen wir uns, ein für allemal hierauf aufmerksam gemacht zu haben.

Tafel 48.

Oben. Die gewöhnliche Art, den Winkel zu benennen, ist die, mittelst drey Buchstaben, wovon der mittlere an des Winkels Scheitel, die zwey andern hingegen an seinen beyden Schenkeln stehen. Der hier stehende heißt: Winkel abc, oder auch: Winkel cba. Allein man hüte sich zu sagen; Winkel bac, oder W. cab, oder W. bca, oder W. acb, denn bey a und bey c befindet sich kein Winkel.

Der eine **Schenkel** dieses Winkels heißt: ba oder ab, der andere bc oder cb, und des Winkels abc **Scheitel** ist der Punkt b.

Da die Größe des Winkels nicht in der Länge der Schenkel, sondern in der Größe ihrer **Neigung**, oder ihrer **Oefnung** bestehet, so läßt sich W. abc auch so benennen: W. fbg, oder W. gbf, oder W. abg, oder Winkel gba.

Eine **zweyte** Art, den Winkel zu bezeichnen, bestehet darin, daß man einen kleinen lateinischen Buchstaben (meist einen der letzten) in seine Oefnung setzt. Anstatt W. abc kann man auch sagen: W. o. Diese Bezeichnungsart ist kürzer, als die vorige, und in vielen Fällen vorzuziehen, wie die Folge lehren wird.

Mitten. Wenn von dem Scheitelpunkte b des W. abc eine gerade Linie bd, zwischen den Schenkeln ba und bc jenes W. hindurchgehet, so wird der ganze W. abc hierdurch in zwey Winkel: abd und dbc getheilet. Es entstehen also durch die drey geraden Linien ba, bd, bc auch drey Winkel abc, abd, dbc, die in b einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt haben.

Winkel abd heißt auch: W. o, und W. dbc heißt: W. u. Beyde Winkel, o und u zusammen, bilden den Winkel abc. Da der Schenkel bd sowohl zu dem W. o, als auch zu W. u gehört, folglich diesen beyden W. gemein ist, so heißt er: der **gemeinschaftliche** Schenkel.

Da W. o und W. u die Theile des W. abc sind, so muß sowohl W. o, als auch W. u **kleiner** seyn, als der W. abc. Daher ist auch W. abc **größer** als W. o, und **größer** als Winkel u.

Unten. In der Oefnung des Winkels abc befinden sich, von dem Scheitel b ausgehend, zwey gerade Linien bd und bf, so entstehen hier im Ganzen: Sechs verschiedene Winkel; Nämlich: W. abc; W. abd; W. abf; W. dbf; W. dbc; W. fbc.

Da alle diese Winkel einzeln nur Theile des W. abc sind, so ist dieser Winkel größer, als alle jene einzeln, und alle jene einzeln sind kleiner, als jener. Daher ist W. o; W. u; W. x; W. o und u; W. u und x, kleiner als Winkel abc.

bd ist gemeinschaftlicher Schenkel von W. o und W. u; bf von W. u, und W. x; b aber ist aller Winkel gemeinschaftlicher Scheitelpunkt.

Tafel 49.

Oben. Hier sind aus dem Scheitel b, des W. cab, drey gerade Linien bd, bf, bg zwischen den Schenkeln ba und bc gezogen. Hierdurch werden zehn verschiedene Winkel gebildet. Nämlich: W. abc, W. abd, W. abf; W. abg; W. dbf; W. dbg; W. dbc; W. fbg; W. fbc; und W. gbc, oder W. o und u und x und y; W. o; W. o und u; W. o und u und x; W. u; W. u und x; W. u und x und y; W. x; W. x und y; und W. y.

Die W. o und u haben bd, die W. u und x haben bf, und die W. x und y haben bg zum gemeinschaftlichen Schenkel. Aller dieser zehn Winkel Scheitel ist der Punkt b.

Mitten. Hier ist ab eine gerade Linie, und aus d sind die zwey geraden Linien dc und df gezogen,

so entstehen drey Winkel, nämlich: W. adc, W. cdf und W. fdb, oder auch: W. o, W. y, und W. u. Da diese drey Winkel an dem gemeinschaftlichen Scheitelpunkt d und an der geraden Linie ab nebeneinander liegen, so heißen auch diese drey Winkel: Nebenwinkel. W. o und W. y haben dc, W. y und W. u aber df zum gemeinschaftlichen Schenkel.

Unten. Werden von den vier geraden Linien ab, cd, ce und cf vier Nebenwinkel, als: W. x, W. y, W. u und W. o gebildet. Hier ist cd gemeinschaftlicher Schenkel von W. x und W. y, ce von W. y und W. u, cf von W. u, und W. o.

Tafel 50.

Oben. Wenn der Winkel adc ein rechter Winkel ist, so heißt die Linie cd eine senkrechte, oder lothrechte Linie auf ab. Auch nennt man diese cd hier ein Loth auf ab, und sagt: die dc stehe senkrecht oder lothrecht auf der geraden Linie ab.

Auf gleiche Weise ist auch ad senkrecht auf dc, und bd lothrecht auf dc; überhaupt ist jeder der Schenkel eines rechten Winkels ein Loth auf den andern Schenkel.

Wenn aber der Winkel fdb ein spitzer, der Winkel fda ein stumpfer ist, so wird die Linie df eine schiefe oder schiefstehende, auf der geraden Linie ab, genennt. Die beyden Winkel fdb und fda heissen hier: Die schiefen Winkel.

Der eine Schenkel, eines jeden spitzen und stumpfen Winkels, steht folglich schief auf dem andern.

Spitze und stumpfe Winkel werden mit einem gemeinschaftlichen Worte: schiefe Winkel benennet.

Mitten. Hier sind drey gerade Linien ab, cd, fg, welche sich in dem Punkte o durchschneiden, und hierdurch drey Paare Scheitelwinkel bilden. Es sind nämlich: W. aoc und W. dob, ferner W. cof und W. god, endlich W., fob und W. goa Scheitelwinkel; auch ist jeder Scheitelwinkel seinem zugehörigen gleich.

Wenn sich auf gleiche Weise vier gerade Linien, in einem Punkte, durchschnitten, so entständen vier Paare von Scheitelwinkeln, wovon die zugehörigen einander gleich sind.

Unten. Wenn die zwey geraden Linien ab und cd, von der dritten geraden Linien fg, in h und g geschnitten werden, so heißt diese Linie fg die schneidende Linie. Es entstehen sowohl rings um h als rings um p vier Winkel, die besondere Namen haben. Weil die W. bhg und dpf auf einer Seite der schneidenden fg, und zwischen den durchschnittenen geraden Linien ab und cd, liegen, so heißen sie: die beyden inneren Winkel. Kürzer bezeichnet man diese innere Winkel mit u und x. Auf der andern Seite der schneidenden Linie fg entstehet ein anderes Paar solcher innern Winkel; nämlich: W. ahg und W. cpf. Wenn also zwey gerade Linien ab und cd von der dritten geraden fg geschnitten werden, so entstehen zwey Paare von innern Winkeln.

Der W. fhb heißt, in Rücksicht des W. fpd der äussern Winkel; der W. fpd aber in Hinsicht des W. fhb der innere Winkel. Desgleichen ist W. gpd

ein äusserer, und W. ghb der ihm zugehörige innere Winkel. Daher giebt es, auf einer Seite der schneidenden Linie fg, zwey Paare von äussern und innern Winkeln. Kürzer heißt man den einen äussern o, seinen innern x, den andern äussern y und seinen innern u. Es ist ersichtlich, daß es auch auf der andern Seite von fg zwey äussere und zwey innere Winkel gebe. Denn W. fah ist der äussere, und W. gpc sein innerer; eben so ist W. gpc der äussere und W. gha der ihm zugehörige innere.

Der W. ahg und fpd, welche auf beyden Seiten der schneidenden Linie fg, und innerhalb der geschnittenen Linien ab und cd liegen, nennt man: Wechselwinkel. Hieraus ergiebt sich, daß auch die W. bhg und opf Wechselwinkel sind.

Noch kann man bemerken, daß, wenn zwey gerade gleichlaufende Linien, von einer dritten lothrecht, durchschnitten werden, sowohl die sämmtlichen innern Winkel, als auch alle äussere und innere, so wie auch die Wechselwinkel einander gleich und lauter rechte Winkel sind, wie man leicht durch eine Figur anschaulich machen kann.

Tafel 51.

Oben. Um dieses Dreyeck zu bezeichnen, nennet man die drey Buchstaben, welche sich an den Scheitelpunkten seiner Winkel befinden. Das hier stehende Dreyeck bezeichnet man also mit: Dreyeck abc, oder Dreyeck abc, oder Dreyeck bca. Zur Bezeichnung jedes Winkels in diesem Dreyecke dienet das Benennen desje-

nigen Buchstabens, welcher sich an dem Scheitelpunkte dieses Winkels befindet. Anstatt: Winkel abc kann man kurz sagen: Winkel b. Desgleichen bedeutet: Winkel a den Winkel bac, und Winkel b den W. abc. Da nämlich an den Scheitelpunkten b, a und c sich jedesmal nur ein Winkel befindet, so kann hier die Benennung des Winkels, durch einen Buchstaben, kein Mißverständniß veranlassen.

Die Betrachtung der Figur zeigt es, daß dem W. a die Seite bc, dem W. b die Seite ac und dem W. c die Seite ab gegenüber liege. Daher heißt: bc in Bezug auf Winkel a; ac in Rücksicht auf W. b; und ab in Hinsicht auf W. c, die gegenüberliegende Seite.

Auf gleiche Weise muß auch jeder Seite ein Winkel gegenüberliegen. Für ab ist W. c; für bc, W. a und für ac W. b, der gegenüberliegende Winkel.

Ferner ist klar, daß jede zwey Seiten im Dreyecke einen Winkel einschließen, welcher der eingeschlossene Winkel genennt wird. Für die Seiten ba und ac ist W. a, für ac und cb W. c und für cb und ba W. b der eingeschlossene Winkel. Auch ist klar, daß an jeder Dreyecksseite zwey Winkel liegen, welche man die anliegenden zu nennen pflegt. Für die Seite ab sind W. a und W. b, für die Seite bc W. b und W. c, und für die Seite ac die W. a und W. c die anliegenden Winkel.

Desgleichen erhellet, daß jeder Winkel des Dreyecks von zwey Seiten gebildet wird, welche man die ihn einschließenden nennt; ferner, daß jede zwey

Winkel eines Dreyecks an einer **gemeinschaftlichen** Dreyecksseite liegen.

Mitten. Wenn in dem Dreyecke acb die gerade Linie cd ein Loth von c auf ab ist, so nennt man die Seite ab des Dreyecks **Grundlinie.** Das Loth cd seine **Höhe** und den Scheitelpunkt c seine **Spitze.**

Dieses Loth cd theilet das Dreyeck acb in zwey rechtwinkelige Dreyecke, cda und cdb, ab.

Die beyden Theile der Grundlinie ad und db heissen: die **Segmente** oder **Abschnitte** der Grundlinie.

Unten. Da dieses Dreyeck fgh ein rechtwinkeliges ist, so ist fg ein Loth auf gh. Nennt man daher gh die **Grundlinie,** so ist fg die **Höhe** des Dreyecks. Da aber auch hg ein Loth auf gf ist, so kann auch gf **Grundlinie** heissen, wo dann hg die **Höhe** ist.

Ist daher im rechtwinkeligen Dreyecke die eine Cathete die **Grundlinie,** so muß die andere, des Dreyecks **Höhe,** seyn.

Nimmt man die Hypothenuse fh zur **Grundlinie,** so ist das Loth ga, des Dreyecks fgh, **Höhe.**

Tafel 52.

Oben. In dem stumpfwinkeligen Dreyecke amb, worin amb der stumpfe Winkel ist, sey ab die **Grundlinie,** so ist das Loth mn die **Höhe** dieses Dreyecks und an und bn sind die beyden **Segmente** der Grundlinie.

Mitten. Wenn man in dem Dreyecke acd, welches einen stumpfen Winkel acd hat, die Seite cd zur Grundlinie nimmt, so wird das Loth ab nicht auf diese Grundlinie dc selbst, sondern auf ihre Verlängerung fallen. Hier liegt folglich die Höhe des Dreyecks nicht innerhalb, sondern ausserhalb, desselben.

Unten. In dem spitzwinkeligen Dreyecke abc ist, für die Grundlinie bc, das Loth ad die Höhe; für die Grundlinie ac ist das Loth bn, und für die Grundlinie ab das Loth cm die Höhe des Dreyecks.

Man sieht hieraus, daß jede Seite des Dreyecks als Grundlinie angesehen werden kann, für welche es auch ein anderes Loth, als Höhe giebt.

Tafel 53.

Oben. Wenn man in dem Dreyecke abc einen Punkt d annimmt, aus welchem, nach den drey Scheitelpunkten des Dreyecks a, b und c, gerade Linien da, db und dc gezogen sind, so entstehen innerhalb dieses Dreyecks drey Dreyecke, nämlich: Dreyeck bdc, Dreyeck cda, und Dreyeck adb. Da diese drey Dreyecke zusammengenommen dem ganzen Dreyecke abc gleich sind, so muß jedes von ihnen einzeln kleiner als das Ganze seyn. Auch betragen irgend zwey dieser Dreyecke zusammen weniger als das ganze Dreyeck. Offenbar ist Dr. bda, und Dr. bdc zusammen kleiner als Dr. abc. Eben so Dr. cdb nebst Dr. cda kleiner

Dr. bca; endlich Dr. acd und Dr. adb zusammen weniger, als Dreyeck bac.

Auch ergiebt sich aus Betrachtung der Figur, daß jedes Paar dieser kleinern Dreyecke eine Linie mit einander gemein haben, welche man deshalb die **gemeinschaftliche** Seite nennt. So ist für Dr. adb und adc die Seite ad, für Dr. bda und bdc die Seite bd, und für Dr. cdb und cda die Seite cd die gemeinschaftliche Seite.

Mitten. Wenn in dem Dreyecke abc die Seite bc bis d verlängert wird, so entstehet ausserhalb des Dreyecks ein Winkel acd, welchen man den **Aussenwinkel**, oder den **Winkel an der verlängerten Seite**, nennt.

Die beyden Winkel im Dreyecke cab und abc, deren keiner ein Nebenwinkel dieses Aussenwinkels ist, heißt man seine **innere entgegenstehende Winkel**. Wenn die Dreyecksseite ca nach f verlängert ist, so heißt Winkel fab der **Aussenwinkel**, und seine zwey **innere ihm entgegenstehende** Winkel sind: acb und cba.

Unten. An dem Dreyecke abc ist die Seite ab nach g und n, die Seite bc nach p und f und die Seite ac nach q und m verlängert, wodurch sechs **Aussenwinkel**, nämlich: W. abf, W. cbg, W. bcq, W. acp, W. cam und W. bam entstehen.

Die zu einem jeden dieser Aussenwinkel gehörigen innern entgegengesetzten Winkel können sehr leicht gefunden und bezeichnet werden. Dieses Auffinden und

Bezeichnen ist eine empfehlenswerthe Uebung für die Schüler.

Tafel 54.

Oben. Jedes Viereck wird benennt, wenn man die vier Buchstaben, welche an dessen Scheitelpunkten stehen, ausspricht, indem man dabey einerley Ordnung befolget. Das Quadrat zur Linken nennt man daher abcd, die Raute zur Rechten mnpq.

Das Quadrat könnte auch mit bdca oder cdab oder dabc oder badc, adcb, dcba oder cbad bezeichnet werden.

Eben dieß gilt von jedem andern Vierecke.

Die vier rechten Winkel des Quadrates heissen kurz: W. a, W. b, W. c und W. d; dessen vier gleiche Seiten: Seite ab, Seite bc, Seite cd, Seite da.

Auch diese Bezeichnung der Winkel und Seiten des Vierecks ist allen Vierecken gemein.

In der Raute mnpq sind die vier Seiten mn, np, pq und qm einander gleich. Nicht so alle Winkel. Denn der stumpfe Winkel m ist dem, ihm gegenüberliegenden stumpfen Winkel p, der spitzige Winkel n dem, ihm entgegenstehenden spitzen Winkel q, gleich.

Mitten. Das Rechteck fgnm hat vier rechte Winkel f, g, n und m, auch sind die gegenüberliegenden Seiten fg und mn, eben so fm und gn einander gleich.

In der Rhomboide qpcb steht, gegen dem stumpfen Winkel q, ein ihm gleicher stumpfer Winkel c, eben so, dem spitzen Winkel p, ein ihm gleicher spitzer

Winkel b gegenüber. Auch sind in der Rhomboide die gegenüberliegenden Seiten qp und bc, ferner qb und pc, einander gleich.

Unten. In dem Paralleltrapez abdc sind, ab und cd, die beyden parallelen oder gleichlaufenden Seiten. Diese Seiten sind immer ungleich. Die beyden andern gegenüberliegenden Seiten ac und db sind hier nach Oben, zusammen- nach Unten, auseinanderlaufend. Sie sind niemals gleichlaufend.

Das Paralleltrapez hat meist vier ungleiche Winkel, wie hier die Winkel a, b, d und c sind. Doch können auch zwey Winkel in diesem Vierecke gleich seyn, wovon man sich leicht Zeichnungen entwerfen kann.

Das Viereck mnqp, welches weder Quadrat noch Raute, weder Rechteck noch Rhomboide oder Paralleltrapez ist, heißt Trapez. Keine zwey seiner gegenüberliegenden Seiten, als mp und nq oder mn und pq, sind gleichlaufend.

Dies Trapez kann übrigens drey gleiche Seiten, oder drey gleiche Winkel, oder auch drey gleiche Seiten und drey gleiche Winkel haben, wovon man leicht Zeichnungen verfertigen kann; eine Uebung, welche sehr zu empfehlen ist.

Tafel 55.

Oben. Wenn abdc eine Raute ist, und an ein Loth von a auf cd ist, so heißt auch in diesem Vierecke cd die Grundlinie und an die Höhe. Nähme man die Seite bd zur Grundlinie an, so wäre das

Loth am die Höhe der Raute. Für die Seite ab als Grundlinie ist das Loth na die Höhe, und für die Seite ac das Loth ma.

Mitten. Für die Rhomboide mndb ist eben so bd als **Grundlinie**, und die senkrechte Linie nc, als Höhe zu betrachten. Wollte man mb als Grundlinie setzen, so würde das Loth na die dazu gehörige Höhe seyn.

Unten. In dem Paralleltrapeze abdc ist für cd als die **Grundlinie**, das Loth nm, die Höhe. Wäre ab Grundlinie, so müßte mn die Höhe seyn. Eben so kann man auch die andern Seiten ac und bd als Grundlinien betrachten, und die ihnen zugehörigen Höhen bestimmen.

Ueberhaupt ist hieraus klar, daß jede der vier Seiten eines Vierecks, als dessen Grundlinien, angesehen werden kann. Für jede dieser Grundlinien giebt es sodann wieder eine besondere Höhe.

Tafel 56.

Oben. Wenn in dem Vierecke abdc von einem Scheitelpunkte b, nach dem ihm gegenüberstehenden c, eine gerade Linie bc gezogen ist, so nennt man dieselbe eine **Diagonale**, oder **Diagonallinie** im Vierecke.

Aus Betrachtung der Zeichnung folget, daß, durch diese Diagonallinie, das Viereck in zwey Dreyecke, nämlich: abc und bdc getheilet wird. Diese beyden Dreyecke haben die Diagonale zur **gemeinschaftli-**

chen Linie, und liegen auf entgegengesetzten Seiten dieser Diagonallinie.

Stellte man sich, anstatt der geraden Linie bc, eine andere gerade von a nach d, d. h. eine Linie ad vor, so ist einleuchtend, daß hierdurch das Viereck in zwey andere Dreyecke abd und acd getheilt würde. Ihre gemeinschaftliche Linie wäre nun ad, und die Dreyecke selbst lägen auf entgegengesetzten Seiten dieser ad.

Mitten. In diesem Vierecke abcd sind zwey Diagonalen, ac und bd gezogen. Sie durchschneiden sich in n, und bilden hier die vier Dreyecke anb, bnc, cnd und dna, deren gemeinschaftlicher Scheitel der Punkt n ist.

Die Dreyecke anb und dnc, so wie auch die Dreyecke bnc und and heissen, wegen ihrer Lage, entgegengesetzte Dreyecke.

Da neben jedem dieser vier Dreyecke zwey andere liegen, so ergiebt sich daraus, was man hier nebeneinanderliegende Dreyecke nennt. Es sind nämlich: and und anb, ferner and und dnc u. s. f. solche Dreyecke.

Auch haben solche nebeneinanderliegende Dreyecke eine Seite gemein. Für die Dreyecke and und anb, ist an, so wie für and und dnc, die dn diese gemeinschaftliche Seite.

Unten. In dem Vierecke abcda heißt der Winkel adc, weil sein Scheitelpunkt d, nach gezogener geraden Linie ac, auf der nämlichen Seite von dieser ac liegt, auf welcher der Scheitelpunkt b ist, ein ein-

wärtsgehender Winkel. Die drey übrigen Winkel dieses Vierecks, als dab und bcd sind, wie gewöhnlich, auswärtsgehende Winkel.

In diesem Vierecke giebt es nur eine Diagonale nämlich: bd, denn ac fällt ausserhalb des Vierecks abcd.

Zum Schlusse von den Vierecken bemerke man noch Nachstehendes: Wenn in dem Vierecke ein Punkt genommen und von demselben nach jedem Scheitelpunkte des Vierecks vier gerade Linien gezogen werden, so entstehen jedesmal vier Dreyecke, welche zusammengenommen, das Viereck bilden. Jede zwey nebeneinander liegende haben eine gemeinschaftliche Seite. Durch eine Zeichnung ist dieses sehr leicht zu erläutern.

Tafel 57.

Oben. Das hier stehende Fünfeck heißt: abcdf. Jedes Fünfeck wird durch die fünf Buchstaben benennet, welche sich an seinen fünf Scheitelpunkten befinden. Bey welchem Punkte man die Benennung anfängt, ist willkührlich. Denn dcbaf odee bcdfa, oder fdcba u. s. f. bezeichnen dieses Fünfeck richtig. Nur hüte man sich, in der Ordnung der auf einander folgenden Winkelpunkten, keinen zu überspringen. Denn abcdf, oder afbcd u. s. w. sind fehlerhafte Bezeichnungen.

Dieses Fünfecks Seiten sind hier ab, bc, cd, df und fa, und seine fünf Winkel heissen: W. a, W. b, W. c, W. d und W. f.

In diesem Fünfecke abcdf sind weder alle Seiten, noch alle Winkel gleich. Man nennt es daher ein unregelmäßiges Fünfeck.

Mitten. Das hier verzeichnete Fünfeck heißt: abcdf. Bey genauer Betrachtung desselben zeigt es sich, daß alle Seiten, nämlich: ab, bc, cd, df und fa einander gleich, so wie auch alle Winkel, nämlich: W. a, W. b, W. c, W. d, W. f gleich groß sind.

Daher heißt dieses Fünfeck ein regelmäßiges Fünfeck.

Die Winkel fab, abc, bcd, cdf und dfa heissen die Polygonwinkel. Der Punkt g, welcher in des Fünfecks Mitte liegt, ist dessen Mittelpunkt.

Zieht man aus diesem Mittelpunkte g, fünf gerade Linien ga, gb, gc, gd, gf, so bildet dieselbe um den Mittelpunkt herum fünf Winkel: agb, bgc, cgd, dgf und fga, deren jeder dem andern gleich ist. Jeden, dieser fünf gleichen Winkel, nennt man Centriwinkel, oder Mittelpunktswinkel.

Jeder der gleichen Winkel fag und bag, abg und cbg u. s. f. heißt: der halbe Polygonwinkel.

Durch die fünf gerade Linien ga, gb, gc, gd und gf, wird das ganze Fünfeck abcdf, in fünf Dreyecke agb, bgc, cdg, dgf und fga getheilt, deren eines gerade so, wie jedes andere, ist.

Unten. Wenn in dem unregelmäßigen Fünfecke fghmn, aus dem Punkte p, die geraden Linien pf, pg, ph, pm und pn gezogen sind, so wird das ganze Fünfeck hierdurch in fünf Dreyecke fgp, gph, hpm, mpn und npf getheilet, welche alle den Punkt p, als Scheitelpunkt, gemein haben.

Auch kömmt jedem Paare nebeneinander liegender Dreyecke eine gemeinschaftliche Seite zu; welche in dem

Fünfecke fghmn leicht aufzufinden und zu benennen sind.

In dem Fünfecke fghmn hat jedes dieser fünf Dreyecke zwey ihm gegenüberstehende. Dem Dreyecke fgn stehen die Dreyecke gph und mph gegenüber. Da nun diese zwey Dreyecke gph und mph das Viereck gpmh bilden, so steht jedem dieser fünf kleinern Dreyecke ein Viereck gegenüber.

Auf gleiche Art liegt auch jedem, dieser in dem Fünfecke fghmn vorhandenen Vierecke, ein Dreyeck entgegen. Das, dem Vierecke fpmn gegenüberstehende, Dreyeck ist das Dreyeck gph.

Alles dieses kann leicht an dem Fünfecke fghmn durchgeführt werden.

Tafel 58.

Oben. In dem Fünfecke abcdf, hat jede Seite einen ihr gegenüberliegenden Winkel, und jeder Winkel eine ihm entgegenstehende Seite. Der Seite ab steht der W. d, der Seite bc der W. f, der Seite cd der W. a, der Seite df der W. b, und der Seite fa der Winkel a gegenüber.

Desgleichen liegt dem W. a die Seite dc, dem W. b die Seite df, dem W. c die Seite fa, dem W. d die Seite ab, und dem W. f die Seite bc gegenüber.

Sind nun von dem Scheitelpunkte a, nach den Endpunkten d und c, der diesem Winkel gegenüberstehenden Seite dc, zwey gerade Linien ad und ac gezogen, so heissen dieselbe die Diagonale im Fünfecke. Sie

theilen das Fünfeck in die drey Dreyecke afd, adc und acb,

Vom Dreyecke adf und adc ist ad, vom Dreyecke acd und acb aber ac, die gemeinschaftliche Seite.

Da jedes Fünfeck fünf Scheitelpunkte hat, von jedem Scheitelpunkte aber, zu den Endpunkten der ihm gegenüberliegenden Seite, zwey Diagonalen Statt finden, so lassen sich in jedem Fünfecke zehn Diagonallinien ziehen. Ohne diese Linien alle zu ziehen, sollen sie blos angedeutet werden; da man die Figur leicht selbst zeichnen kann. Sie heißen: ad und ac, fb und fc, da und db, cf und ca, bd und bf, wovon jedoch fünf die nämlichen sind. Da jede zwey Diagonale das Fünfeck in drey Dreyecke theilen, so entstehen durch die, in dem Fünfecke möglichen zehn, Diagonallinien eigentlich fünfzehn Dreyecke. Sie sind folgende: Dreyeck afd, adc, acb, fdc, fcb, fba, daf, dab, dbc, cfd, cfa, cab, bcd, bdf, bfa.

Man sieht aber leicht, daß unter diesen fünfzehn Dreyecken fünf immer die nämlichen sind, nämlich: afd und daf, acb uub cab, fdc und cfd, und endlich dbc und bcd. Daher giebt es eigentlich nur zehn verschiedene Dreyecke, in welche das Fünfeck durch Diagonalen getheilt werden kann. Diese Dreyecke sind: afd fdc, dcb, cba, baf, dac, fbd, acf, bda und cfb. Jedes dieser Dreyecke bildet mit einem danebenliegenden Vierecke das Fünfeck wieder. Zum Dreyecke afd gehört das Viereck dabc, zum D. fdc das V. cfab, zum Dr. dcb das V. dbfa, zum Dreyeck cba das Viereck acdf und zum Dreyeck baf das Viereck fbcd,

Jedes dieser Dreyecke hat, mit dem danebenliegenden Vierecke, eine gemeinschaftliche Seite, welche nach der genannten Ordnung die Seiten ad, fc, db, ca und bf sind.

Alles dieses kann leicht durch die wirkliche Anschauung klar werden.

Mitten. In diesem Fünfecke gacdf sind die Winkel cag, agf, gfd und fdc auswärtsgehende, der Winkel acd aber ist ein einwärtsgehender Winkel.

Werden hier die Diagonallinien gc und fc gezogen, so entstehen in dem Fünfecke die drey Dreyecke, gca, gcf und fcd.

Was wegen der noch übrigen Diagonalen zu bemerken ist, kann leicht durch Zeichnungen anschaulich werden.

Unten. Das hier stehende Fünfeck abcdf hat drey auswärtsgehende Winkel, fab, abc und bcd, aber zwey einwärtsgehende, nämlich: W. afd und fdc.

Durch die beyden Diagonallinien bf und bd, wird das Fünfeck wieder in drey Dreyecke bfa, bfd und bdc getheilt.

Aus Anschauung dieser sämmtlichen Fünfecke ergiebt sich nunmehr die allgemeine Regel: Jedes Fünfeck kann durch Diagonallinien in drey Dreyecke getheilt werden.

Man bekömmt daher in diesem Falle so viele Dreyecke, als die getheilte Figur Seiten hat, weniger zwey.

Tafel 59.

Oben. Die hier stehende Zeichnung ist ein Sechseck. Seine Seiten: ab, bc, cd, df, fg, ga; seine Winkel heissen: a, b, c, d, f, g. Das ganze Sechseck heißt: abcdfg, oder dfgabc oder fgabcd, oder auch gfdcba u. s. w. Nicht aber: abcgfd oder fdgacb u. s. w.

Dieses Sechseck hat weder sechs gleiche Seiten, noch sechs gleiche Winkel. Daher heißt es: ein unregelmäßiges Sechseck.

Mitten. Dieses Sechseck abcdfg ist ein regelmäßiges Sechseck. Denn alle Seiten: bc, cd, df, fg, ga, ab, sind gleich, so wie auch die sechs Winkel b, c, d, f, g, a, einander gleich sind.

Jede dieser sechs gleichen Seiten heißt: Seite des regelmäßigen Sechsecks, jeder der sechs gleichen Winkel wird Polygonwinkel genennt. Der Punkt h heißt des Sechseckes Mittelpunkt.

Es ist wieder klar, daß dieses Sechseck durch die Linien ha. hb. ho, hd, hf, hg, in sechs Dreyecke getheilt werde, deren eines gerade wie das andere ist, und daß rings um den Punkt h sechs gleiche Winkel entstehen, welche Centriwinkel oder Mittelpunktswinkel heißen.

Unten. Wenn aus dem Punkte o in dem Sechsecke abcdfg, sechs gerade Linien oa, ob, oc, od. of, og gezogen sind, so entstehen in dem Sechsecke sechs Dreyecke, nämlich: aob, boc, cod, dof, fog, goa, welche um den gemeinschaftlichen Scheitelpunkt o herum liegen.

Auch hat jedes Paar nebeneinander liegender Dreyecke eine gemeinschaftliche Seite, die leicht zu finden und zu benennen ist.

Jedes der sechs Dreyecke, in welche das Sechseck getheilt worden ist, hat ein ihm gegenüberliegendes Dreyeck. Dem Dreyecke aob steht das Dreyeck fod gegenüber u. s. w.

Desgleichen hat jede Sechseckseite eine andere, die ihr gegenüber liegt. Die gegenüber liegende Seite von ab ist fd, u. s. f. Eben dieses gilt auch von den Winkeln. Dem Winkel gab liegt der Winkel fdc gegenüber. u. s. f.

Tafel 60.

Oben. In dem Sechsecke mnopqr, sind aus dem Scheitelpunkte p, drey Diagonallinien: pr, pm und pn gezogen, welche das Sechseck in vier Dreyecke theilen. Sie sind prq, pmr, pnm und pou.

Jedes Paar, dieser nebeneinander liegenden Dreyecke, hat eine gemeinschaftliche Seite.

Da man, aus jedem der sechs Winkelpunkte des Sechsecks, drey Diagonalen ziehen kann, welche das Sechseck in vier Dreyecke theilen, so sind überhaupt sechsmal drey oder achtzehen solcher Diagonalen möglich, wodurch im Ganzen viermal sechs, oder vier und zwanzig Dreyecke in dem Sechsecke entstehen.

Da aber unter diesen Dreyecken sechsmal die nämlichen vorkommen, so erhält man durch alle Diagonalen im Sechsecke eigentlich nur achtzehn verschiedene Dreyecke.

Diese sämmtlichen Dreyecke sich durch die Anschauung klar zu machen; und durch die gehörigen Buchstaben zu benennen, ist eine lehrreiche Uebung für die Anfänger, die nun keinem schwer fallen wird.

Durch eine Diagonale wird das Sechseck entweder in ein Viereck und ein Dreyeck, oder in zwey Vierecke getheilt.

Durch zwey Diagonalen wird das Sechseck immer in zwey Dreyecke und ein Viereck getheilt.

Drey Diagonalen theilen aber das Sechseck immer in vier Dreyecke. Die mancherley Fälle, welche durch diese Diagonalen enstehen können, müssen dem Anfänger durch Zeichnungen erläutert werden.

Mitten. In dem Sechsecke fghmno befinden sich vier auswärtsgehende Winkel, nämlich: gfo, fon, onm, nmh, und zwey einwärtsgehende, als: fgh, ghm.

Die Eintheilung dieses Sechseckes durch Diagonallinien in Dreyecke, oder in Dreyecke und Vierecke, oder in Dreyecke und Fünfecke muß durch die nöthigen Zeichnungen zur klaren Anschauung gebracht werden.

Unten. Das hier stehende Sechseck abcdfg enthält drey auswärtsgehende Winkel cba, bag und agf, desgleichen drey einwärtsgehende, nämlich: bcd, cdf, dfg,

Wegen der mancherley Diagonallinien gilt hier die vorige Bemerkung wieder.

Aus der bisher betrachteten Theilung der Sechsecke durch Diagonalen ergiebt sich die Regel: Jedes Sechseck kann durch Diagonallinien in vier Dreyecke getheilt werden.

Auch hier erhält man aus dem Sechsecke so viele Dreyecke als dasselbe Seiten hat, weniger zwey.

Tafel 61.

Oben. Dieses Siebeneck wird auf die nun bekannte Weise mit abcdfgh benennt. Seine sieben Seiten sind: ab, bc, cd, df, fg, gh, ha. Seine sieben Winkel heissen: a, b, c, d, f, g, h.

Da hier weder alle Seiten noch alle Winkel gleich sind, so ist dieses Siebeneck ein unregelmäßiges.

Aus Betrachtung dieses Siebenecks ist klar, daß jeder Seite ein Winkel, so wie auch jedem Winkel eine Seite gegenüber liegt. Der, der Seite cd gegenüber liegende, Winkel ist h, so wie dem Winkel b, die Seite gf gegenüber steht.

Unten. Das Siebeneck gfdcbah hat alle Seiten und alle Winkel gleich. Daher heißt es ein regelmäßiges Siebeneck.

Werden aus seinem Mittelpunkte m die sieben geraden Linien mg, mf, md, mc, mb, ma und mh gezogen so entstehen sieben gleiche Centriwinkel.

Auch hat dieses regelmäßige Siebeneck sieben gleiche Polygonwinkel.

Tafel 62.

Oben. Wenn aus dem Punkte q des unregelmäßigen Siebenecks hmnopfg sieben gerade Linien qh, qm, qn, qo, qp, qf und qg, gezogen sind, so ist klar, daß das ganze Siebeneck hierdurch in sieben Drey-

ecke getheilt wird, deren gemeinschaftliche Spitze in q ist, und welche leicht zu benennen sind.

Ein Dreyeck hqm macht aus dem Siebenecke zwey Theile, deren einer eben dies Dreyeck hqm, der andere aber das Achteck qhgfponmq ist.

Zwey Linien qh und qn bilden in dem Siebenecke ein Viereck hqnm, und ein Siebeneck qhgfponq.

Diese Uebung kann leicht weiter fortgesetzt werden. Daher wird sie hier nicht ferner ausgeführt.

Unten. In dem Siebenecke hnbcdf giebt es aus dem Punkte g vier Diagonalen: gn, gb, gc und gd, welche dasselbe in fünf Dreyecke: ghn, gbn, gcb, gdc und gfd theilen.

Da aus jedem Winkelpunkte des Siebenecks vier Diagonale möglich sind, so giebt es im Ganzen viermal sieben, oder acht und zwanzig Diagonallinien; und da durch jede vier zusammengehörige Diagonalen fünf Dreyecke entstehen, so sind in dem ganzen Siebenecke fünfmal sieben, oder fünf und dreyßig, Dreyecke möglich.

Da unter diesen Dreyecken sieben die nämlichen sind, so giebt es in dem Siebenecke eigentlich nur acht und zwanzig verschiedene Dreyecke.

Die Anschauung des Siebenecks führt auch hier zur Regel: Jedes Siebeneck kann durch Diagonalen in fünf Dreyecke getheilt werden.

Man hat daher auch nun wieder so viele Dreyecke als das Siebeneck Seiten hat, weniger zwey.

Wie vielerley Sechsecke, Fünfecke und Vierecke durch die Diagonalen des Siebenecks möglich sind, er-

giebt sich leicht aus den Zeichnungen, und wird hier wieder zur Uebung anempfohlen.

Tafel 63.

Oben. Um die Kreislinie zu bezeichnen, benennt man die, an derselben stehenden, Buchstaben, z. B.: adbhmga. Jedes Stück dieser krummen Linie wird mit einigen daran stehenden Buchstaben bezeichnet, z. B.: dbh, oder hmg, oder gad.

Der Halbmesser dieses Kreises ist entweder cd, oder ca, oder cb. Die Linie ab, ist des Kreises Durchmesser; die krumme Linie adb, die halbe Kreislinie, wovon die andere Hälfte agmha heißt.

Die gerade Linie gh ist eine Sehne, und die krumme Linie gmh, der zu dieser Sehne gehöriger Bogen. Die gerade Linie gq, ist die Tangente, oder Berührungslinie des Kreises.

Unten. Das Stück ahb, welches der vierte Theil der ganzen Kreislinie ist, heißt: der Quadrant. Zieht man von a und b die Halbmesser ac und bc, so ist acb ein rechter Winkel.

Den, von dem Bogen mdn und der Sehne mn gebildeten, Abschnitt bezeichnet man mit mndn, oder mdnm. Der, von den Halbmessern cm und cn, und dem Bogen mdn gebildete, Ausschnitt wird durch die Buchstaben mcndm, oder ndmcn ausgedrückt. Die Anschauung lehret hier, daß das Dreyeck mcn, und der Abschnitt mdnm zusammen den Ausschnitt cmdnc bilden.

Tafel 64.

Oben. Der Winkel acb, dessen Scheitel c der Mittelpunkt des Kreises ist, und dessen Schenkel die zwey Halbmesser ca und cb sind, heißt: ein Winkel am Mittelpunkte, oder Mittelpunktswinkel. Der Theil der Kreislinie afb, zwischen seinen Schenkeln, heißt: der Bogen worauf er steht.

Der Winkel dma, dessen Scheitelpunkt m, in der Kreislinie liegt, und dessen Schenkel md und ma Sehnen des Kreises sind, wird ein Winkel an der Peripherie, oder auch Peripheriewinkel genennt. Das zwischen seinen Schenkeln enthaltene Stück der Kreislinie da heißt: der Bogen, worauf er steht.

Der Winkel dgb, dessen Scheitel g sich ausserhalb des Kreises befindet, dessen Schenkel gb und gd aber zum Theil Sehnen des Kreises (nämlich md und nb) sind, heißt: ein äusserer Winkel am Kreise, so wie der Winkel dha, der mit seinem Scheitel h, die Kreislinie nicht erreicht, ein innerer Winkel genennt wird.

Unten. Von den beyden hier stehenden Kreislinien, die den nämlichen Mittelpunkt c gemein haben, heißt: aqprba, der äussere: mdfnm der innere Kreis. Der Halbmesser des äussern Kreises ist: ca, oder cb, jener des innern: cm, oder cn.

Dasjenige, was zwischen der äusseren und innern Kreislinie eingeschlossen ist, wird der Ring genennt und dasjenige, was zwischen den Bogen agb, mhn,

und den geraden Linien am und bn enthalten ist, nennt man: den Ausschnitt des Rings, welcher daher durch agbnhm bezeichnet wird.

Schlußbemerkung.

Auch hier folge der verständige Lehrer dem Gesetze, nicht eher weiter zu gehen, bis Alles vorhergehende vollkommen eingeübt ist. Eine zweckmäßige Uebung ist die Seele dieses Unterrichtes.

Der

Geometrischen Anschauungslehre

Dritter Cursus.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

BIBLIOTECA REGIA ... ACENSIS

Dritter Cursus.

Tafel 65.

Oben. Wenn sich ein, auf der Tafel oder auf dem Papiere gegebener Punkt a, dergestalt auf der Tafel oder über das Papier fortbeweget, daß er Spuren dieser Bewegung zurückläßt, so beschreibt er eine Linie. Da dieser Punkt a, nach allen möglichen Richtungen auf der Tafel, oder auf dem Papiere fortschreiten kann, so entstehen hieraus höchst mannigfaltige Linien, die sowohl nach ihren Richtungen, als nach ihren Gestalten, verschieden seyn können.

Mitten. Beweget sich der Punkt a dergestalt gegen den Punkt b, daß er immer nach einer und derselben unveränderten Richtung in seiner Bewegung fortschreitet, so beschreibt er die gerade Linie ab.

Beweget sich derselbe von a nach q in gerader Richtung, und schreitet sodann wieder in gerader Richtung von q nach b, so ist sein Weg die gebrochene oder Winkellinie aqb.

Beweget sich aber dieser Punkt a dergestalt gegen b, daß er in jedem Augenblicke seine vorige Richtung verläßt, und in einer andern fortschreitet, so

beschreibet er eine krumme Linie z. B. acdb, oder amnb, oder ahb.

Bey allen diesen Linien sieht man weder auf die Breite, noch auf die Dicke, sondern blos auf ihre Länge. Dies gilt sowohl von Linien, welche man mit einem Stücke zugespitzter Kreide auf der schwarzen Tafel, oder mit dem Beystifte auf das Papier verzeichnet. Diese Linien bestehen zwar wirklich aus kleinen Körperchen von Kreide oder Reisbley, welche sich an die Tafel oder auf das Papier angehängt haben; allein man betrachtet, bey diesen sichtbaren Linien, blos ihre Länge.

Daher versteht man unter einer Linie diejenige Ausdehnung, die sich nur nach der Länge erstreckt.

Die gerade Linie ist diejenige, welche sich nur nach einer einzigen Richtung hin erstreckt.

Die krumme heißt jene, welche nach sehr vielerley Richtungen fortschreitet.

Die gebrochene oder Winkellinie heißt jene, welche ihre gerade Richtung plötzlich verläßt und nach einer andern, ebenfalls wieder geraden Richtung, weiter schreitet.

Unten. Die Theile jeder geraden Linie sind selbst wieder gerade Linien.

Wenn ah eine gerade Linie ist; so sind die Theile ab, bc, cd, dh, so wie auch ac, ad oder bc, bd u. s. w., gerade Linien.

Die krumme Linie besteht aber aus Theilen, die selbst wieder krumme sind. Die krumme Linie abcdf kann zwar in Theile ab, bc, cd, df getheilt werden,

allein jeder dieser Theile ist eine krumme Linie, gleich-wie auch abc, bcd, cdf u. s. f., krumme Linien sind.

Zwischen zwey gegebenen Punkten a und b (Mitten) ist nur eine einzige gerade Linie möglich. Dagegen giebt es zwischen diesen beyden Punkten unzählig viele gebrochene, oder krumme, oder vermischte Linien.

Vermischte Linien heißen nämlich diejenige, welche theils aus geraden, theils aus krummen bestehen.

Wenn man sich eine gerade Linie mit Kreide auf der schwarzen Tafel, mit Dinte oder Tusche oder Bleystift auf dem Papiere, oder durch eine angespannte Schnur, oder einen Drath u. s. f. denket, so bemerket man, daß das Eigenthümliche der Linie nicht in Kreide noch in der Dinte u. s. f. bestehet, sondern lediglich in der geraden Ausdehnung nach der Länge. Wer sich auf dem Felde z. B. von einem Baume nach dem andern eine gerade Linie vorstellt, denket sich weder eine gespannte Schnur, noch einen Drath, noch weniger einen Strich von irgend einer Farbe, sondern eine Ausdehnung, nach der bloßen Länge in gerader Richtung, von einem Baume zum andern. Diese Linie ist also eine blos gedachte und keine mit Augen gesehene. Sie ist in uns und nicht ausser uns. Eben so ist's mit einer geraden Linie, die man sich z. B. von der Spitze eines Thurmes auf den Boden lothrecht denket. Diese blos gedachten Linien haben weder Breite noch Dicke, sondern nur Länge. Um sie anschaulicher zu machen, bedienen wir uns der

bekannten **sichtbaren** Linien von Kreide, Bleystift u. s. f.

Alle Linien also, welche man auf die Tafel oder auf das Papier **sichtbar** zeichnet, sind nur Stellvertreter derjenigen Linien, die wir uns eigentlich **nur denken**. Je feiner und zärter solche sichtbare Linien gezogen werden, desto genauer entsprechen sie der blos gedachten Linie, deren Natur einzig in der Länge besteht.

Anmerkung. Diese Betrachtungen bilden den wichtigen Uebergang von der **äussern** Anschauung zur **innern**; von dem, was das Auge **sieht**, und der Verstand denket. Daher ist es durchaus nothwendig, den Schüler von nun an von der äussern Betrachtung mehr nach der innern zu leiten, damit alles **Mechanische** vermieden, das **Geistige** aber zur klaren Erkenntniß gebracht werde.

Tafel 66.

Oben. Es seyen ab und cd zwey gleichgroße gerade Linien, so kann man in Gedanken die Linie ab dergestalt in die Linie cd bringen, daß der Punkt a in den Punkt c und die Linie ab längs der Linie cd liege. Da ab und cd gleich groß sind, so fallen gewiß auch ihre Endpunkte b und d in einander. Die gerade Linie ab liegt also hier so in cd, daß man ab von cd gar nicht mehr unterscheiden kann. Die vorhin getrennten Linien ab und cd bilden nun **eine einzige** gerade Linie cd. Eben so hätte man cd in ab legen können, daß c in a, cd längs ab und d in b gefallen

wäre, und dann würden die zuvor getrennten Linien cd und ab nur einzige gerade Linie ab bilden. Dieses gänzliche Ineinanderfallen zweyer geraden Linien nennt man: das Decken derselben oder ihr Congruenz.

Man hüte sich, dieses Ineinanderfallen zweyer geraden Linien mit ihrem Aufeinanderfallen zu verwechseln. Wären z. B. ab und cd zwey gerade gleichlange und durchaus gleichgeformte, viereckige Stäbchen von Holz, so könnte man wohl das Stäbchen ab auf das andere cd legen. Diese Stäbchen könnten aber nie ineinanderfallen, da jedes, als physischer Körper, das Eindringen des andern in seinen Raum verhindert. Hier hätte also ein bloßes Aufeinanderfallen statt. Allein geometrische Linien sind keine physische Körper, welche einander Widerstand leisten, und wir können uns in den nämlichen Punkten a und b, der geraden Linie ab, auch die Punkte c und d, der gleichgroßen geraden Linie cd, denken, so daß nun cd und ab gänzlich ineinanderfallen.

Hieraus folget der klare Satz: Wenn zwey gerade Linien gleich sind, so können sie so ineinander gelegt werden, daß sie sich decken.

Umgekehrt. Alle gerade Linien die sich decken, müssen gleichgroß seyn.

Mitten. Wenn die gerade Linie ab kleiner ist, als die gerade cd, so kann jene so in diese gelegt werden, daß a in c und ab längs cd fällt. Da nun ab kleiner als cd ist, so muß b zwischen c und d, z. B. in m, fallen, und die Linie ab wird nur einen Theil der Linie cd decken. Die Linie md wird hier

den Unterschied bestimmen, um welchen cd größer als ab ist.

Von zwey geraden Linien ist also jene die **kleinere**, welche, gehörig in die größere gelegt, einen Theil der größern decket; jene aber wird die **größere** genennt, von welcher nur ein Theil durch die andere gedeckt werden kann.

Praktisch bestimmt man den Unterschied der Größe zweyer geraden Linien durch den **Zirkel**. Wenn man nämlich die Endpunkte der Linie ab mit den Spitzen der Zirkelfüße fasset, sodann diese eine Spitze in den Endpunkt c setzt und mit dem andern auf der Linie cd in m ein Merkmal macht, so giebt md an, um wie viel cd größer als ab ist. Dieses mechanische Verfahren beruhet aber, wie man leicht sieht, auf der strengen Theorie.

Hierdurch ist nun auch die Aufgabe: Eine kleinere Linie von einer größern abzuziehen, aufgelößet.

Unten. Aus der Natur der geraden Linie folget, daß der Punkt, durch dessen Bewegung sie hervorgebracht wurde, auf beyden Seiten in der nämlichen Richtung noch weiter fortschreiten kann. Hierdurch wird die gerade Linie über jeden Endpunkt hinaus vergrößert werden. Dies Größerwerden der geraden Linie, nach ihrer ursprünglichen Richtung, heißt man das **Verlängern** derselben. Und es ist klar, daß jede gerade Linie zu beyden Seiten **ohne Ende** verlängert werden kann.

Dies **Verlängern** gerader Linien geschieht praktisch oder mechanisch durch das **Lineal**, oder auf an-

dere Weise. Bey blos gedachten geraden Linien braucht man nur zu denken, sie seyen auf beyden Seiten verlängert, wodurch sie denn wirklich in Gedanken verlängert sind.

Soll man mehrere gerade Linien, wie ab, cd, fg in eine einzige gerade verwandeln, d. h. ihre Summe finden, so denke man sich irgend eine gerade Linie mr von unbestimmter Länge. Wird nun die ab gehörig von m längs r gelegt, so fällt b in n und die Linien ab und mn decken sich. Wird eben so die cd in no, die fg in op gelegt, so entspringt eine einzige gerade Linie mp, welche den drey gegebenen zusammengenommen gleich ist. Praktisch geschieht dies am Einfachsten mit dem Zirkel, dessen Anwendung auch hier wieder mit der strengen Theorie übereinstimmt.

Tafel 67.

Oben. Wenn man weiß, daß zwey gerade Linien mit ihren Endpunkten ineinanderfallen, so müssen sich auch dieselbe decken, da zwischen zwey Punkten nur eine einzige gerade Linie möglich ist.

Wenn aber die gerade Linie ab und die krumme Linie amnb ihre Endpunkte gemein haben, so decken sie dennoch nicht, so wenig als die krumme Linie amnb und die andere krumme ahrb, die ebenfalls gemeinschaftliche Endpunkte haben.

Mitten. Krumme Linien können sich nur dann decken, wenn sie bey gleichen Endpunkten auch einerley Krümmung haben. Wenn in dem Kreise abmna die Mittelpunktswinkel acb und mcn rechte Winkel sind,

so wird der Kreisbogen ab den Kreisbogen mn decken können, da dieselbe vollkommen einerley Krümmung haben.

Will man das Decken zweyer krummen Linien erkennen, so muß man überzeugt seyn, daß alle Punkte der einen auf die zugehörigen Punkte der andern fallen.

Unten. Das Viereck abdc ist ein Rechteck, seine vier Seiten sind gerade Linien und als solche nur nach der Länge ausgedehnt. An dem Rechtecke aber, welches von den vier Seitenlinien gebildet wird, erkennt man ausser der Länge (von c nach d) auch noch eine Breite (von c nach a). Dieses Rechteck ist also sowohl nach der Länge als nach der Breite ausgedehnt. Diese doppelte Ausdehnung nach der Länge und Breite bemerken wir eben so an dem Papiere, worauf dieses Rechteck verzeichnet ist, oder an der Tafel, worauf wir unsere Zeichnungen vorstellen.

Diejenige Ausdehnung im Raume, welche sich nach der Länge und Breite erstreckt, heißt eine Fläche.

Wenn man von der Fläche eines Tisches, eines Feldes, des Fußbodens oder der Seitenwand eines Zimmers u. s. f., spricht, so denkt man nur an Länge und Breite, keineswegs aber an die Dicke. Wir können uns daher bloße Länge und Breite vorstellen, ohne auf die Dicke zu sehen, welche oft noch mit Länge und Breite verbunden ist. Wenn wir z. B. von der Fläche der hölzernen Schultafel sprechen, so denken wir gar nicht an die Dicke der Bretter, woraus sie besteht.

Tafel 68.

Oben. Wenn man sich auf der Fläche dieses Papiers beliebige Punkte: a und b, c und d, f und g, m und n u. s. f., vorstellt, so werden die, sie verbindenden geraden Linien, ab, cd, fg, mn nach ihrer ganzen Länge innerhalb der Fläche des Papieres liegen. Die Papierfläche ist also eine solche, die in jeder Richtung nach Länge und Breite eine gerade ist.

Eine Fläche in welcher alle gerade Linien, die man zwischen beliebigen Punkten auf ihr ziehen kann, ganz in der Fläche liegen, heißt eine ebene Fläche oder eine Ebene. Jene Fläche aber, in welche gerade Linien, die man nach verschiedenen Richtungen in sie leget, nicht ganz hineinfallen, nennt man krumme Flächen. Ein zusammengekrümmtes Kartenblatt, die Umfangsfläche einer Walze, die krumme Oberfläche einer Kugel u. s. f. erläutern dieses.

Diese krummen Flächen sind entweder einfachgekrümmte oder allseitiggekrümmte. In jenen lassen sich von einigen Punkten gerade Linien ziehen, welche ganz und gar in sie hineinfallen, bey diesen wird auch nicht eine einzige gerade Linie ganz in sie gelegt werden können. Auf der krummen Fläche einer Walze sind, von Oben nach Unten, sehr viele gerade Linien möglich, aber keine einzige gerade Linie kann, nach einer andern Richtung, in dieser krummen Oberfläche liegen. Eben dieses hat bey der krummen Kegelfläche statt. Daher sind die krummen Flächen der Walze und des Kegels einfach gekrümmte. In der

Kugelfläche dagegen läßt sich auch nicht eine einzige gerade Linie denken, welche ganz in sie hineinfällt. Folglich ist diese eine allseitiggekrümmte Fläche.

Anmerkung. Es ist sehr rathsam, kleine Modelle von der Walze, dem Kegel, der Kugel u. s. f., etwa von Holz verfertigt, dem Schüler vorzuzeigen, um sowohl die Anschauung, als den Begriff dieser krummen Flächen, vollkommen klar zu machen.

Gleichwie die gerade Linie aus Bewegung des Punktes entsteht, so läßt sich die ebene Fläche oder die Ebene durch Bewegung einer geraden Linie erkennen. Wenn nämlich eine gerade Linie sich dergestalt nach der Seite beweget, daß sie bey ihrem Fortschreiten durchaus die nämliche Lage beybehält, so beschreibt sie eine ebene Fläche. Schreitet diese Linie dagegen in immer veränderter Richtung fort, so erzeugt sie eine krumme Fläche.

Ein dünnes, gerades Stäbchen von Holz, welches lothrecht auf der Ebene des Tisches steht, und sich in dieser Lage, nach einer auf dem Tische gezogenen geraden Linie, fortbeweget, dienet zur Versinnlichung der Art und Weise, wie aus Bewegung der geraden Linie eine Ebene entstehet. Beweget sich dagegen dieses Holzstäbchen über eine auf dem Tische vorhandene krumme Linie, auf die bemerkte Weise, fort, so giebt dieses ein Bild von Erzeugung der krummen Fläche.

Man bemerke, daß die geometrische Ebene, gleich der Linie, eine blos gedachte und keine gesehene ist. Denn wenn man z. B. von der Ebene eines Gartens, einer Wiese u. s. f., spricht, so ist dieselbe nicht

in dem an sich mehr oder weniger unebenen Felde, sondern nur in der Vorstellung vorhanden. Indessen dienet z. B. die äussere Fläche der schwarzen Schultafel, oder die Fläche des Papieres, des Schiefersteins u. s. f., sehr wohl zur Versinnlichung derjenigen Vorstellung, die wir von der Ebene haben.

Man bemerke, daß alle fernern Konstruktionen, welche wir mit Linien, Winkeln u. s. f., vornehmen, jedesmal eine solche geometrische Ebene voraussetzen, in welcher sie ausgeführt werden. Alle diese Linien, Winkel u. s. f., werden sich in und nicht auf dieser Ebene befinden; denn weder die blos gedachte Linie, noch die blos gedachte Ebene hat eine Dicke, da jener nur eine Länge, dieser nur eine Länge und Breite zukömmt. Daher sind alle Linien, welche z. B. mit Kreide auf der Tafel, oder mit Bleystift auf dem Papiere gezogen werden, nur Sinnbilder, um dasjenige zur äussern Anschauung des Auges zu bringen, was der innern Anschauung des Geistes mit größter Klarheit gegeben ist.

Mitten. Wenn fg eine gerade in der Ebene befindliche Linie, und f ihr einer Endpunkt ist, so kann man sich aus diesem Punkte eine zweyte gerade fd denken, welche eine solche Lage hat, daß sie mit der Linie fg nicht eine einzige gerade bildet. Das, was hierdurch entsteht, nennt man den ebenen Winkel, dessen beyde Schenkel sich immer in einerley Ebene befinden.

Wenn die Linie fg, wie vorhin, in der Ebene des Papieres des Punktes d hingegen oberhalb dieser Ebene

liegt, so wird, wenn man sich von d nach f eine gerade Linie denket, auch dieser zweyte Winkel dfg in einer und der nämlichen Ebene liegen. Denn, wenn sich die Ebene des Papieres um die unbewegliche Linie *fg* rings herumdrehet, so muß sie den Punkt d einmal erreichen. Wo dieses geschieht, da liegt der Punkt d in ihr, und folglich auch die ganze gerade Linie df nebst dem Winkel dfg.

Anmerkung. Dieses Drehen der Ebene muß dem Schüler durch die sinnliche Anschauung deutlich gemacht werden, wie auch sehr leicht geschehen kann.

Jede drey Punkte, welche man sich, wo immer im Raume denken mag, befinden sich daher alle in einerley Ebene. Daher werden jede zwei gerade Linien, welche aus einem gemeinschaftlichen Endpunkte ausgehen, einen ebenen Winkel bilden.

Wenn die beyden Linien, welche den Winkel bilden, gerade sind, so heißt er ein ebener geradliniger Winkel. Werden in der nämlichen Ebene aus einem Punkte zwey krumme Linien gezogen, welche keinen andern Punkt mehr gemein haben, so entstehet der krummlinige Winkel. Ist der eine Schenkel eine gerade, der andere eine krumme Linie, so heißt der Winkel ein gemischtliniger. Wenn wir in der Folge vom Winkel überhaupt sprechen, so verstehen wir immer den ebenen geradlinigen darunter, weil dieser von der größten Wichtigkeit ist.

Wenn die beyden Winkel hbc und dfg gegeben sind, so kann man den Schenkel fg dergestalt in bc legen, daß f in b und fg längs bc liegt. Fällt nun

hier der andere Schenkel fd in den Schenkel bh, so werden sich die Winkel dfg und hbc decken, und sind daher gleiche Winkel. Da aber die Größe eines Winkels nicht von der Länge seiner Schenkel, sondern von ihrer Neigung abhängt, so kömmt nichts darauf an, ob der Schenkel fg den Schenkel bc und der Schenkel fd den Schenkel bh decken wird oder nicht. Denn der Winkel mbn ist offenbar der nämliche als der Winkel hbc.

Hieraus folget der wichtige Satz: Gleiche Winkel können jedesmal so ineinander gelegt werden, daß sie sich decken.

Umgekehrt: Wenn zwey Winkel einander decken, so müssen sie gleich seyn.

Unten. Wenn man den Winkel dfg dergestalt über bc sich denket, daß f in b und fg längs bc liegt, und der andere Schenkel fd nicht in bh fällt, so muß er entweder einwärts, nach ba, oder auswärts nach bm fallen. Im ersten Falle muß, da der Winkel abc nur ein Theil vom Winkel hbc ist, auch der Winkel dfg, welcher dem Winkel abc gleich ist, nur ein Theil des Winkels hbc seyn. Daher ist Winkel dfg kleiner als Winkel hbc, und der Winkel hba ist ihr Unterschied.

Im zweyten Falle ist Winkel mbc größer als Winkel hbc, folglich muß auch Winkel dfg nunmehr größer als Winkel hbc seyn. Der Winkel mbh ist hier wieder ihr Unterschied.

Aus diesem Ineinanderlegen der Winkel ist es einleuchtend, wie man den Unterschied von zwey unglei-

chen Winkeln bestimmen kann. Denn wenn beyde mit ihren Scheiteln und dem einen Schenkel ineinanderliegen, und nun die beyden andern Schenkel nicht ineinanderfallen, so sind die Winkel ungleich, und man erkennt sogleich den größern, den kleinern, und den Unterschied.

Tafel 69.

Oben. Wenn qrt ein beliebiger Winkel ist, und man denket sich aus seinem Scheitelpunkte r die geraden Linien rp und rs zwischen seinen Schenkeln rq und rp gezogen, so wird hierdurch der ganze Winkel qrt in mehrere kleinere Winkel, als dessen Theile, eingetheilt. Diese Theilwinkel sind: qrp, prs, srt. Zusammen bilden sie wieder den Winkel qrt. Jeder dieser drey genannten Winkel ist daher kleiner, als der ganze. Ausser diesen drey Winkeln entstehen hier noch zwey andere, nämlich: W. qrs und W. prt, deren jeder aus zwey nebeneinanderliegenden Theilwinkeln gebildet wird.

Es ist eine zweckmäßige Uebung, den gegebenen Winkel in eine noch größere Zahl von kleinern zu theilen, und sodann diese sämmtlichen Theilwinkel, nebst den aus ihren Verbindungen entspringenden größern Winkel gehörig zu benennen, und zur klaren Anschauung zu bringen.

Wie man mehrere gegebene Winkel, z. B. abc, dfh, mgn zusammen in einen einzigen verwandeln, oder summiren kann, wird nun sehr einleuchtend seyn. Wenn man nämlich an den Winkel rst, welcher

dem W. abc gleich ist, den zweyten prs, welcher dfh und den dritten grp, welcher mgn gleich ist, gehörig anleget, so muß der W. qrt dem gegebenen b, f und g gleich seyn. Die Art und Weise, wie man einen gegebenen Winkel einem andern gleich machen könne, gehört nicht in die Anschauungslehre, sondern in das Gebiet der Geometrie.

Mitten. Die hier befindlichen Winkel acb und acd sind Nebenwinkel, jener ein stumpfer, dieser ein spitzer. Beydes ist aus dem I. und II. Cursus bekannt.

Hier soll die Entstehung und der Begriff dieser Winkel klar werden.

Wenn man in der geraden bd einen beliebigen Punkt c annimmt, und aus demselben die gerade ca, welche weder mit cd noch mit cb zusammenfällt, ziehet, so entstehen zwey Winkel, welche man Nebenwinkel heißt.

Nebenwinkel sind daher jene, welche einen Schenkel mit einander gemein haben, und deren nicht gemeinschaftliche Schenkel in einer geraden Linie liegen. (Es ist hier nur von zwey Nebenwinkeln die Rede.)

Unten. Wenn man sich aus dem beliebigen Punkte g der geraden ad zwey gerade gb und gc denket, so entstehen an dem gemeinschaftlichen Scheitelpunkte g fünf Winkel, nämlich: agb, agc, bgc, bgd und cgd. Die drey an der geraden ad nebeneinander liegenden Winkeln o, x und u heissen auch Nebenwinkel. Man erkennt sie daran, daß jedes Paar

nebeneinander liegender Winkel einen gemeinschaftlichen Schenkel hat und die beyden äussersten Schenkel eine einzige gerade Linie bilden.

Wie auf solche Weise vier, fünf, sechs u. s. f. Nebenwinkel entstehen können, ist sehr leicht zu übersehen; ihre Bildung, Anschauung und Benennung aber eine lehrreiche Uebung.

Tafel 70.

Oben. Die Winkel acb und acd sind zwar an der geraden ac, als ihrem gemeinschaftlichen Schenkel nebeneinanderliegende, jedoch keine Nebenwinkel, da die nicht gemeinschaftlichen Schenkel cb und cd keine gerade Linie, sondern eine Winkellinie bilden.

Mitten. Wenn aus dem Punkte n der geraden cd die Linie na dergestalt gezogen ist, daß die beyden Nebenwinkel and und anc einander gleich sind, so nennt man jeden von diesen zwey gleichen Nebenwinkeln einen rechten Winkel, und die Linie na ein Loth auf cd, so wie auch dn und cn Lothe auf an sind.

Die Art und Weise, wie man die gerade na ziehen müsse, daß sie mit der cd zwey gleiche Nebenwinkel bilde, ist hier noch unbekannt. Aber Niemand wird die Möglichkeit in Zweifel ziehen, daß die gerade na auf solche Weise gezogen werden könne. Dies ist bisher der erste Fall, wo wir etwas (den rechten Winkel und das Loth) erklären, ohne die bestimmte Methode anzugeben, wodurch man die wirkliche Erzeugung der erklärten Sache überzeugend erkennet.

Solche Erklärungen, wodurch man nur angiebt, was man sich unter einem gewissen Worte zu denken habe, ohne dabey zu zeigen, wie die zu erklärende Sache entstehe oder hervorgebracht werde, nennt man Worterklärungen. Jene Erklärungen aber, wodurch man sogleich die Entstehung der zu erklärenden Sache einsieht, heißen: Sacherklärungen. Die bisherigen Erklärungen von dem Winkel überhaupt, und von Nebenwinkeln, waren Sacherklärungen. Die jetzige Erklärung des rechten Winkels und des Lothes ist aber nur eine Worterklärung. Denn die Entstehung der Nebenwinkel ist Jedem aus Obigem von selbst einleuchtend, nicht so aber die wirkliche Erzeugung des rechten Winkels.

Diese wirkliche Konstruktion des rechten Winkels und des Lothes gehört nicht in die vorbereitende Anschauungslehre, sondern selbst in die Geometrie. Dort wird diese Worterklärung zu einer strengen Sacherklärung werden.

Auch bemerke man, daß alle hier noch folgenden Worterklärungen erst dann für die streng geometrische Wissenschaft brauchbar seyn können, wenn solche, durch unläugbare Sätze der Geometrie, in Sacherklärungen verwandelt werden.

Wenn man zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels anc einen Punkt b annimmt, und die gerade bn zieht, so ist W. bnc kleiner als W. anc, d. h. W. bnc ist kleiner als der rechte.

Ein Winkel, welcher kleiner als ein rechter ist, heißt ein spitzer Winkel.

Da der Winkel bnd aus dem rechten and und dem spitzen bna besteht, so ist W. bnd größer als der rechte.

Ein Winkel, welcher größer als der rechte ist, heißt ein stumpfer Winkel.

Spitze und stumpfe Winkel nennt man mit einem gemeinschaftlichen Worte schiefe Winkel und der eine Schenkel eines spitzen Winkels heißt, in Rücksicht des andern Schenkels, eine schiefe Linie. Eine gerade Linie steht daher schief auf einer andern, wenn sie mit dieser einen spitzen oder einen stumpfen Winkel bildet.

Nun sind folgende Sätze sehr einleuchtend:

1) Alle rechte Winkel sind einander gleich.
2) Jeder rechte Winkel ist größer als jeder spitze, und jeder spitzer kleiner als der rechte Winkel.
3) Jeder stumpfe Winkel ist größer als der rechte, der rechte kleiner als jeder stumpfer.
4) Jeder spitzer Winkel ist kleiner als der stumpfe und jeder stumpfe Winkel größer als der spitze.
5) Nicht alle spitze Winkel sind einander gleich; eben so nicht alle stumpfe Winkel.
6) Es giebt sowohl gleiche, als größere und kleinere spitze und stumpfe Winkel.

Unten. Wenn man in der geraden Linie ab einen willkührlichen Punkt n annimmt, und durch denselben eine gerade Linie dnc leget, welche mit der geraden ab nicht zusammenfällt, so entstehen die Scheitelwinkel anc, dnb und and, cnb.

Scheitelwinkel sind daher jene, welche entstehen, wenn zwey gerade Linien sich in einem ihrer Zwi-

schenpunkte durchschneiden, wodurch rings um diesen Durchschnittspunkt vier Winkel entstehen, wovon die beyden entgegenliegenden die Scheitelwinkel sind.

Die Entstehung der Scheitelwinkel läßt sich auch so einsehen: Wenn cnb ein gegebener spitzer Winkel ist, und man verlängert dessen Schenkel bn über den Scheitel nach a, so entstehet ein stumpfer Winkel cna, als Nebenwinkel des spitzen cnb. Wird nun auch der andere Schenkel cn über n nach d verlängert, so entstehen hierdurch noch zwey Winkel auf der andern Seite von ab, nämlich der stumpfe bnd und der spitze and. Von diesen vier Winkeln ist nun cnb Scheitelwinkel von anb, und cna Scheitelwinkel von dnb. Der Scheitelwinkel eines gegebenen Winkels entsteht also auch, wenn man seine beyden Schenkel über den Scheitel rückwärts verlängert.

Wenn der gegebene Winkel ein rechter ist, so ist auch sein Scheitelwinkel ein rechter.

Tafel 71.

Oben. Wenn die drey geraden Linien ab, fd und mn sich in einem gemeinschaftlichen Punkte c durchschneiden, so entstehen um diesen Durchschnittspunkt c sechs Winkel, wovon drey Paare Scheitelwinkel sind. Zu acm gehört ncb; zu acd gehört bcf, und zu dcn gehört fcm, als Scheitelwinkel.

Wie aus dem Durchschnitte mehrerer geraden Linien noch mehr Scheitelwinkel entstehen können, ist nun von selbst klar.

Mitten. Obgleich hier aus dem Punkte c die Linien ca, cb, cd, cm und cn, nach verschiedenen Richtungen ausgehen, und die fünf Winkel acb, bcd, dcm, mcn und nca bilden, so haben hier dennoch keine Scheitelwinkel statt. Denn keine der Linien ac, bc, dc, mc und nc wird, wenn man sie rückwärts über c verlängert, in eine der schon vorhandenen eintreffen, um mit ihr eine einzige gerade zu bilden. Zur Bildung der Scheitelwinkel gehören also durchaus mehrere gerade, sich in einem Punkte schneidende, Linien.

Unten. Wenn zwey gerade, in einerley Ebene liegende Linien ab und cd, eine solche Lage haben, daß, wenn man dieselbe beyderseits sowohl über b und d, als auch über a und c ohne Ende verlängert, dieselbe weder auf der einen noch auf der andern Seite zusammentreffen, so werden sie gleichlaufende oder parallele Linien genannt. Ihr Gleichlaufen oder Parallelseyn besteht also in dem nie erfolgenden Durchschnitte, man mag sie zur Rechten und Linken noch so weit verlängern.

Diese Erklärung von Parallellinien ist eine blose Worterklärung. Denn die Frage, ob solche Linien wirklich möglich sind, und wie sie erhalten werden können, muß erst noch beantwortet werden. Diese Beantwortung gehört aber nicht hieher, sondern in die eigentliche Geometrie.

Tafel 72.

Oben. Zwey gerade Linien in einerley Ebene, wie ab und cd, welche einmal zusammentreffen werden, wenn man sie über b und d gehörig verlängert, heißen zusammenlaufende oder convergirende Linien.

Zwey gerade Linien, wie ba und dc, welche bey ihren Verlängerungen über a und c immer weiter und weiter auseinanderlaufen, nennt man auseinanderlaufende oder divergirende Linien.

Wenn zwey gerade Linien auf der einen Seite convergirende sind, so müssen sie nach der entgegengesetzten divergirende seyn, und umgekehrt.

Auch diese Linien werden erst in der Geometrie ihre wissenschaftlichen Bestimmungen erhalten.

Mitten. Wenn die zwey Parallellinien ab und cd von der dritten geraden mn durchschnitten werden, so entstehen bekanntlich acht Winkel, welche besondere Namen haben.

Die beyden innern Winkel an Parallellinien heissen jene, welche auf einerley Seite der schneidenden Linie, und zwischen den beyden Parallelen, liegen. W. u und W. y; W. o und W. x sind diese innern Winkel.

Jedem einzelnen dieser innern Winkel gehört ein äusserer zu, welcher mit ihm zwar auf einerley Seite der schneidenden Linie, aber ausserhalb der Parallellinien liegt, ohne jedoch sein Nebenwinkel zu seyn. Von W. g ist W. s; von W. u ist W. v; von

W. x ist W. r; von W. o ist W. z, der äussere Winkel.

Wechselwinkel an Parallellinien sind jene, welche auf entgegengesetzten Seiten der schneidenden Linien und zwischen den Parallellinien liegen, ohne daß einer der Nebenwinkel des andern ist.

Unten. Wenn man in den Schenkeln ba und bc des Winkels abc zwey willkührliche Punkte d und n annimmt, und dieselbe durch eine gerade Linie dn verbindet, so wird die Oeffnung des Winkels geschlossen und es entsteht hierdurch das geradlinige Dreyeck dbn.

Hieraus folget, daß die Ebene des Dreyecks eine ringsumher geschlossene, in bestimmten Grenzen enthaltene, Ebene sey.

Eine, von geraden Linien durchaus eingeschlossene, Ebene nennt man eine geradlinige Figur.

Das geradlinige Dreyeck ist folglich eine Figur, welche entstehet, wenn die Oeffnung eines Winkels durch eine gerade Linie zugeschlossen wird.

Diese Erklärung des Dreyecks ist eine Sacherklärung.

Bey jedem Dreyecke kann man betrachten:

1) seine drey Seiten, d. h. die Linien, die es bilden;
2) seine drey Winkel, welche aus dem Durchschnitte jeder zwey, dieser drey Seiten, entstehen, und
3) den Flächenraum, welchen das Dreyeck enthält.

Das geradlinige Dreyeck ist daher auch eine Figur, welche von drey geraden Linien eingeschlossen wird.

Das geradlinige Dreyeck hat drey gerade Linien, das krummlinige drey krumme Linien und das gemischtlinige theils gerade, theils krumme Linien zu seinen Seiten.

Aus dem Begriffe der Figur, als eines allseitiggeschlossenen Raumes folget, daß weder der ebene Winkel, noch die Parallellinien, noch überhaupt irgend zwey gerade Linien eine Figur bilden können. Aber eine gerade und eine krumme Linie, oder auch zwey krumme Linien, sogar eine einzige krumme Linie, können Figuren bilden, wie man dieses leicht durch Zeichnungen erläutern kann.

Eine Figur heißt krummlinigt, wenn sie nur von krummen Linien, vermischtlinig, wenn sie theils von geraden, theils von krummen Linien eingeschlossen ist.

Ein gleichseitiges Dreyeck ist ein Dreyeck, welches drey gleiche Seiten hat.

Ein gleichschenkeliges Dreyeck heißt dasjenige, worin zwey gleiche Seiten sind.

Ein ungleichseitiges Dreyeck wird jenes Dreyeck genennt, welches drey ungleiche Seiten hat.

Diese drey Erklärungen sind Worterklärungen. Die mittlere kann aber leicht hier schon dadurch zur Sacherklärung werden, daß man aus dem Scheitel irgend eines Winkels auf seinen beyden Schenkeln zwey gleiche Stücke annimmt, und ihre Endpunkte durch eine gerade Linie verbindet.

Die Grundlinie im gleichschenkeligen Dreyecke heißt jene Seite, welche den beyden andern ungleich ist. Die beyden gleichen Seiten nennt man die glei-

chen Schenkel. Die Grundlinie kann größer oder kleiner, als jeder dergleichen Schenkel, seyn.

Die beyden Winkel, welche die Grundlinie mit den gleichen Schenkeln bildet, heissen Winkel an der Grundlinie; und der Scheitel des der Grundlinie gegenüberliegenden Winkels wird die Spitze genannt.

Ein rechtwinkeliges heißt jenes Dreyeck, welches einen rechten und zwey spitze Winkel enthält. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite nennt man Hypotenuse; die beyden den rechten Winkel bildenden Seiten, die Catheten.

Ein stumpfwinkeliges Dreyeck ist ein Dreyeck, worin sich ein stumpfer Winkel und zwey spitze befinden.

Ein spitzwinkeliges Dreyeck heißt jenes, welches drey spitze Winkel enthält. Diese drey Erklärungen sind gleichfalls nur Worterklärungen; die Untersuchung, warum ein Dreyeck nur einen rechten oder einen stumpfen Winkel enthalten könne, übersteiget die Grenzen der Anschauungslehre, und gehört in die Geometrie.

Vom gleichschenkeligen Dreyecke ist noch zu bemerken, daß es sowohl gleichschenkelig=rechtwinkelig, als gleichschenkelig=stumpfwinkelig und gleichschenkelig=spitzwinkelig, seyn kann.

Ueberhaupt folget hieraus, daß man die Dreyecke sowohl nach ihren Seiten, als nach ihren Winkeln eintheilen kann. Wie vielerley sie in beyder Rücksicht sind, ist eben dargelegt worden.

Tafel 73.

Oben. Man kann jede, der drey Seiten des Dreyecks abc, als seine Grundlinie betrachten. Diese Benennung bezieht sich auf die Höhe des Dreyecks, worunter man ein Loth von der, der Grundlinie gegenüberliegenden Spitze, auf diese Grundlinie versteht. Nimmt man bc als Grundlinie, so ist das Loth ad die Höhe des Dreyecks.

Wenn man in dem rechtwinkeligen Dreyecke die eine Cathete als Grundlinie nimmt, so ist die andere die Höhe, und umgekehrt. Wird die Hypotenuse zur Grundlinie genommen, so ist das Loth, aus dem Scheitel des rechten Winkels auf dieselbe, des Dreyecks Höhe.

Mitten. Dreyecke heissen: von einerley Höhe, wenn die Lothe, die diese Höhen bestimmen, gleich sind. So sind die Dreyecke mgh und ndc von einerley Höhe, wenn die Lothe mp und nq gleich sind.

Unten. Dreyecke heissen von einerley Grundlinie, wenn die Seiten in ihnen, die man als Grundlinien annimmt, gleich sind. In den Dreyecken abn und qmd sind die Grundlinien bn und md gleich, die Höhen ac und qp ungleich. Daher heissen diese Dreyecke von einerley Grundlinie und von verschiedener Höhe.

Tafel 74.

Oben. Wenn in zwey Dreyecken Grundlinien und Höhen ungleich sind, so werden sie Dreyecke von

verschiedener Grundlinie und Höhe genannt. Zum Beyspiele dienen die Dreyecke abc und mdh, deren Grundlinien bc und dh, gleichwie auch die Höhen ad und mn ungleich sind.

Mitten. Zwey Dreyecke heissen congruent oder übereinstimmend, wenn man das eine dergestalt in das andere legen kann, daß alle Seiten und Winkel einander decken.

Wenn man z. B. das Dreyeck abc so in das Dreyeck bdn legen kann, daß die Seite bc, die Seite dn; der Winkel b den Winkel d; der Winkel c den Winkel n; die Seite ba die Seite dm; der Winkel a den Winkel m, und die Seite ac die Seite mn, decket, so sind beyde Dreyecke congruent.

Congruente Dreyecke sind in nichts verschieden, und bilden daher nur ein und das nämliche Dreyeck.

Congruente Dreyecke können so ineinandergelegt werden, daß sie sich decken.

Dreyecke, die sich decken, sind congruent.

In congruenten Dreyecken sind die, sich deckenden, Seiten und Winkel einander gleich.

Wenn man weiß, daß zwey Dreyecke congruent sind, so kann man von den bekannten gleichen Seiten auf die ihnen entgegenstehenden Winkel, und umgekehrt, von den Winkeln, auf die ihnen gegenüberliegenden Seiten schließen. Gesetzt die Dreyecke abc und mdn wären congruent, man wüßte, daß die Seite ab der Seite md gleich ist, und man wollte im Dreyecke mdn den Winkel finden, welcher dem Winkel c des Dreyecks abc gleich ist, so würde dies der Winkel n seyn; denn

dieser Winkel n liegt gegen nd über, so wie der Winkel c gegen ab überliegt. Auf eben diese Art könnte man aus der Gleichheit der Winkel a und m auf die Gleichheit der ihnen gegenüberstehenden Seiten bc und dn schließen.

Allgemein ausgesprochen heißt dieses so: In congruenten Dreyecken stehen gleichen Seiten gleiche Winkel, und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Die Congruenz der Dreyecke ist folglich die gänzliche Uebereinstimmung dieser Dreyecke in ihren Seiten, Winkeln und Flächenräumen.

Unten. Dreyecke heissen ähnlich, wenn jeder Winkel des einen einem Winkel im andern gleich ist; oder die Seiten, welche diese Winkel bilden, proportional sind. Dies Proportionalseyn besteht aber darin, daß die drey Seiten des einen Dreyecks z. B. zweymal, dreymal, viermal u. s. f. so groß oder so klein sind, als die Seiten im andern Dreyecke.

Wenn in den Dreyecken acb und dfg die Winkel a und d; c und f; d und g gleich sind, auch ac von df; cb von fg, und ba von gd z. B. das Doppelte ist, so sind diese Dreyecke ähnlich.

Auch diese Erklärung ist eine Worterklärung. Die Sache selbst muß in der Geometrie streng begründet werden.

Tafel 75.

Oben. Das Dreyeck bac sey gleichschenkelig, und ab so groß wie ac. Nimmt man in bc einen beliebigen Punkt d und zieht die gerade ad, so zerfällt dieses Drey-

eck in zwey andere adb und adc. Denkt man sich nun das Dreyeck adb bleibe unbeweglich, das Dreyeck adc drehe sich aber um den festen Punkt a, von d gegen f, so lange bis ac in ab fällt, so hat nun das Dreyeck adc die Lage afb. Hier ist nun klar, daß das Viereck afbda, weil es mit dem Dreyecke abc aus zwey vollkommenen übereinstimmenden Theilen besteht, diesem Dreyeck selbst an Größe gleich seyn muß. Das Viereck afbda hat daher mit dem Dreyecke abc einerley Flächenraum, obschon das Viereck gegen das Dreyeck eine ganz andere Gestalt hat.

Die Gleichheit zweyer Flächen besteht darin, daß beyde einerley Größe haben, wenn sie gleich in ihrer Gestalt verschieden sind.

Vergleicht man die Congruenz, die Aehnlichkeit und die Gleichheit mit einander, so kann man sagen:

Congruenz ist die Uebereinstimmung in Gestalt und Größe.

Aehnlichkeit ist die Uebereinstimmung in der Gestalt bey verschiedener Größe.

Gleichheit ist die Uebereinstimmung in der Größe bey verschiedener Gestalt.

Diese drey Begriffe werden auch bey andern Figuren betrachtet werden, und sind dem strengen Vortrage der Geometrie von größter Wichtigkeit.

Mitten. Wenn man sich vorstellt, das rechtwinkelige Dreyeck acd werde, um die unverrückbare Cathete cd so herumgedrehet, daß a in n fällt, so entstehet der Flächenraum acnda. Drehte sich hingegen das Dreyeck acd um die feste Cathete ac so, daß

d in b fällt, so entstünde der Flächenraum abcda. Beyde Flächenräume müssen gleich seyn, da jeder das Doppelte von dem Dreyecke acd ist. Diese Flächenräume stimmen daher in der Größe, aber nicht in der Gestalt überein.

Unten. Ein Dreyeck heißt in einen Kreis beschrieben, wenn sich seine drey Winkelpunkte in der Kreislinie befinden. Dies gilt vom Dreyecke mnd in Rücksicht der Kreislinie nadbnfn.

Ein Kreis heißt um ein Dreyeck beschrieben, wenn die Kreislinie durch dessen drey Winkelpunkte geht. Der Kreis nadbnf ist um das Dreyeck nmd beschrieben.

Tafel 76.

Oben. Ein Kreis heißt in das Dreyeck beschrieben, wenn die Kreislinie jede der Dreyecksseiten in einem Punkte berühret. Der Kreis hfgh ist in das Dreyeck abd beschrieben, weil die Kreislinie in h, f und g die Dreyecksseiten ba, ad und db berühret.

Das Dreyeck heißt um den Kreis beschrieben, wenn jeder seine drey Seiten einen Punkt mit der Kreislinie gemein hat. Das Dreyeck abd ist um die Kreislinie hfg beschrieben, weil die Punkte h, f und g den Dreyecksseiten und der Kreislinie gemein sind. Diese vier letzten Erklärungen sind wieder Worterklärungen, wie man nach dem bisherigen kaum mehr zu bemerken braucht.

Der Aussenwinkel heißt derjenige Winkel des Dreyecks, welcher von einer seiner verlängerten Seiten

und der an dieser anliegenden Seite gebildet wird. Die beyden innern entgegengesetzten heißen jene beyden Winkel im Dreyecke, wovon keiner ein Nebenwinkel des Aussenwinkels ist.

Mitten. Es sey acb ein gegebenes Dreyeck. Nimmt man nun über der Seite ab einen Punkt d an, welcher innerhalb der Schenkel des Winkels acb liegt, und zieht die gerade ad und bd, so entstehet hieraus eine, von vier geraden Linien ac, cb, bd, da eingeschlossene Ebene.

Eine Figur, welche von vier geraden Linien eingeschlossen wird, heißt ein Viereck.

Würde ein Punkt g innerhalb des gegebenen Dreyecks angenommen, und aus ihm die geraden Linien ga und gb gezogen, so entstände ebenfalls ein Viereck acbga, welches bey g einen einwärtsgehenden Winkel hat.

Diese Erklärung des Vierecks ist eine Sacherklärung.

Bey jedem Vierecke kann man Rücksicht nehmen:

1) auf seine vier Seiten d. h. auf die Linien, die es bilden;
2) auf die vier Winkel, welche von diesen Seiten gebildet werden;
3) auf die Fläche, welche das Viereck enthält.

Da das Viereck entweder vier gerade Linien, oder vier krumme, oder theils gerade, theils krumme Linien enthalten kann, so versteht sich von selbst, was ein geradliniges, ein krummliniges und ein gemischtliniges Viereck ist.

Die Vierecke sind von sechserley Art entweder Quadrate, oder Rauten, oder Rechtecke, oder

Rhomboiden, oder Paralleltrapeze, oder Trapeze schlechthin.

Das Quadrat ist ein Viereck, welches vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel hat.

Die Raute ist ein Viereck, welches vier gleiche Seiten und zwey Paare gleicher Winkel, welche theils spitze, theils stumpfe sind, enthält.

Das Rechteck ist ein Viereck, welches zwey Paare gleicher Seiten und vier rechte Winkel hat.

Die Rhomboide ist ein Viereck, welches zwey Paare gleicher Seiten, und zwey Paare gleicher Winkel, theils spitze, theils stumpfe, enthält.

Das Paralleltrapez ist ein Viereck, worin nur zwey gegenüberliegende Seiten gleichlaufend oder parallel sind.

Das Trapez ist ein Viereck, worin die gegenüberliegenden Seiten theils zusammenlaufende theils auseinanderlaufende sind.

Da die Gestalt dieser Vierecke aus dem Vorhergegangenen bekannt genug ist, so erspart man sich hier wiederholte Zeichnungen derselben.

Es ist klar, daß sämmtliche Erklärungen dieser Vierecke bloße Worterklärungen sind, welche erst durch den Vortrag der Geometrie zur Vollendung gebracht werden.

Das Quadrat und die Raute stimmen darin überein, daß beyde Vierecke vier gleiche Seite haben. Sie unterscheiden sich aber darin von einander, daß das Quadrat vier rechte Winkel, die Raute dagegen zwey stumpfe und zwey spitze Winkel hat.

Das Quadrat hat mit dem Rechtecke die rechten Winkel gemein, aber beyde unterscheiden sich in den Seiten, da das Quadrat vier gleiche Seiten, das Rechteck nur, gegenüberliegende gleiche Seiten, hat.

Das Quadrat hat mit der Rhomboide gegenüberliegende gleiche Seiten und gegenüberliegende gleiche Winkel gemein. Sie unterscheiden sich aber darin, daß in dem Quadrate vier gleiche Seiten und vier gleiche Winkel, in der Rhomboide aber nur gegenüberliegende gleiche Seiten und gegenüberliegende gleiche Winkel sind.

Die Raute und das Rechteck stimmen in den gegenüberliegenden gleichen Seiten, und in den gegenüberliegenden gleichen Winkeln überein; sind aber darin verschieden, daß die Raute vier gleiche Seiten und gegenüberliegende gleiche Winkel, das Rechteck dagegen vier gleiche Winkel und gegenüberliegende gleiche Seiten hat.

Die Raute hat mit der Rhomboide gegenüberliegende gleiche, theils spitze, theils stumpfe Winkel gemein, unterscheidet sich aber dadurch von ihr, daß jene vier gleiche, diese aber nur die gegenüberliegenden Seiten, gleich hat.

Das Rechteck und die Rhomboide kommen in den gegenüberliegenden gleichen Seiten überein; unterscheiden sich aber in den Winkeln, da das Rechteck vier rechte, die Rhomboide gegenüberliegende spitze und stumpfe Winkel enthält.

Das Quadrat, die Raute, das Rechteck und die Rhomboide haben mit einander gemein, daß

die gegenüberliegenden Seiten gleichlaufend oder parallel sind.

Vierecke, welche gegenüberliegende parallele Seiten haben, nennt man Parallelogramme.

Das Quadrat ist daher ein Parallelogramm von vier gleichen Seiten und vier rechten Winkeln.

Die Raute ist ein Parallelogramm von vier gleichen Seiten und gegenüberliegend gleichen Winkeln.

Das Rechteck ist ein Parallelogramm von gegenüberliegend gleichen Seiten und vier rechten Winkeln.

Die Rhomboide ist ein Parallelogramm von gegenüberliegend gleichen Seiten und eben solchen Winkeln.

Das Paralleltrapez ist folglich so wenig, als das Trapez, ein Parallelogramm zu nennen.

Die Erklärung vom Parallelogramme ist ebenfalls nur eine Worterklärung.

Gleichwie in dem Dreyecke, so kann auch in dem Vierecke, jede Seite die Grundlinie heißen. Die Höhe ist sodann ein Loth von der entferntesten gegenüberliegenden Winkelspitze des Vierecks auf diese Grundlinie.

Im Quadrate ist die Grundlinie der Höhe gleich.

In der Raute wird die Höhe kleiner als die Grundlinie seyn.

In dem Rechtecke ist die Höhe bald kleiner bald größer als die Grundlinie, nachdem man die größere oder kleinere Seite des Rechtecks zur Grundlinie wählt.

In der Rhomboide kann die Höhe ebenfalls bald kleiner bald größer als die Grundlinie seyn. Die Be-

weise dafür giebt die Geometrie. Die Anschauung erläutert diese Sätze.

Unter der Diagonallinie des Vierecks versteht man eine gerade Linie, welche von einem beliebigen Winkelpunkte, nach dem entgegenstehenden, gezogen wird.

In jedem Vierecke sind zwey Diagonallinien möglich.

Jede Diagonallinie theilt das Viereck in zwey Dreyecke, die eine gemeinschaftliche Seite haben. Durch zwey Diagonalen wird das Viereck in vier Dreyecke getheilt, deren jedes zwey anliegende und ein gegenüberliegendes hat.

Unten. Wenn abcd ein Paralleltrapez ist, worin ab und cd die parallelen Seiten sind, so ist das Loth an die Höhe dieses Vierecks. Durch die Diagonale ad entstehen zwey Dreyecke acd und adb, welche die gleichlaufenden Seiten cd und ab zn Grundlinien und das Loth an (wie in der Geometrie zu erweisen ist) zur Höhe haben.

Jedes Paralleltrapez wird durch eine Diagonale in zwey Dreyecke getheilt, welche einerley Höhe, und die Parallelseiten zu ihren Grundlinien haben.

Tafel 77.

Wenn zwey Parallelogramme die nämliche Grundlinie und Höhe haben, und man stellt sie mit diesen gleichen Grundlinien in einander, so daß sie auf einerley Seite derselben liegen, so hat eine dreyfache Lage derselben statt.

Oben. Hier befinden sich, über der Grundlinie mn, die beyden Parallelogramme mnba und mncb;

die Seitenlinie des Parallelogramms mncb ist hier zugleich die Diagonale des Parallelogramms mnba, und es entstehen durch diese Lage drey Dreyecke: mab, bmn, und nbc.

Mitten. Ueber der Grundlinie pq stehen hier die Parallelogramme pqna und pqcm. Die Seitenlinie pm, des zweyten, fällt hier zwischen die Linie na des ersten, und es entstehen hierdurch zwey Dreyecke pam, qnc, und ein Paralleltrapez mnqp.

Unten. Die Parallelogramme cdma und cdbn haben cd zur gemeinschaftlichen Grundlinie. Die Seitenlinie des zweyten cn durchschneidet hier die Seitenlinie dm des ersten. Hierdurch entstehen die zwey Paralleltrapeze amgc, nbgd und die zwey Dreyecke cgd, mgn.

Tafel 78.

Oben. Vierecke sind congruent, wenn sie so ineinander gelegt werden können, daß alle Seiten und Winkel des einen die zugehörigen Seiten und Winkel des andern decken. Aus der bewiesenen Congurenz der Vierecke kann man auf die Gleichheit der beyderseitigen Seiten und Winkel schließen, so, wie man umgekehrt, aus dem beyderseitigen Decken der Seiten und Winkel, auf die Congurenz der Vierecke schließen kann.

Die Aehnlichkeit der Vierecke besteht darin, daß in zwey Vierecken die Winkel nach einerley Ordnung einander gleich, und die, diese Winkel bildenden, Seiten proportional sind. Dies Proportionalseyn bestehet aber darin, daß jede Seite des einen Vierecks so vielmal

größer oder kleiner, als die ihr zugehörige des andern ist, so vielmal größer oder kleiner alle übrige zusammengehörige Seiten dieser Vierecke einzeln, gegeneinander sind.

Die Vierecke abcd und fgpq sind ähnlich, wenn W. a und W. f; W. b und W. g; W. c und W. p, und W. d und W. q gleich sind, auch ad so vielmal größer als fg ist, so vielmal ab größer als fg, bc als gp und cd als pq ist. Daß diese Erklärung keine Sacherklärung sey, leuchtet von selbst ein.

Mitten. Die Gleichheit zweyer Vierecke bestehet in der gleichen Größe ihrer Flächenräume.

Diese Gleichheit kann hier durch ein leichtes Beyspiel erläutert werden.

In dem Vierecke abcd sey ad so groß wie cd. Zieht man die Diagonale bd, so entstehen zwey Dreyecke bda und bdc. Denket man sich nun, das Dreyeck bdc rücke, um den festen Punkt d, von b gegen a und f so lange hin, bis dc in da liegt, wodurch das Dreyeck dcb die Lage von daf bekömmt. Hierdurch ist offenbar das Viereck abcd dem Vierecke bdfa an Flächenraume gleich, obschon beyde eine verschiedene Gestalt haben.

Auch hier bemerke man: congruente Vierecke stimmen in Größe und Gestalt, ähnliche Vierecke nur in der Gestalt, gleiche Vierecke nur in der Größe überein.

Unten. Das Viereck heißt in den Kreis beschrieben, wenn es mit seinen vier Winkelpunk-

ten in der Kreislinie liegt, wie z. B. abcd. Der Kreis heißt hier: um das Viereck beschrieben.

Tafel 79.

Oben. Wenn ein Kreis die vier Seiten des Vierecks in vier Punkten berühret, so heißt der Kreis in das Viereck beschrieben, das Viereck aber um den Kreis beschrieben. Zum Beyspiele dienet der Kreis ghmn und das Viereck abcd.

Mitten. Wenn abcd ein gegebenes Viereck ist, und man nimmt einen Punkt m, der ausserhalb ad und zwischen den verlängerten ba und cd liegt, so entsteht, wenn die geraden ma und md gezogen werden, das Fünfeck mabcd. Nähme man den Punkt n innerhalb des Vierecks und zöge die geraden na und nd, so entstände auch ein Fünfeck abcdn mit dem einwärts gehenden Winkel n.

Ein Fünfeck ist eine Figur, welche von fünf Linien eingeschlossen wird.

Ein geradliniges Fünfeck besteht aus fünf geraden, ein krummliniges aus fünf krummen und ein gemischtliniges aus fünf, theils geraden theils krummen, Linien.

Daß man an jedem Fünfecke fünf Seiten, fünf Winkel und den eingeschlossenen Flächenraum unterscheiden könne, ist von selbst klar.

Unten. Die Entstehung des Fünfecks läßt sich auch dadurch einsehen, daß aus dem Punkte h fünf Linien ha, hb, hc, hd und hf gezogen sind, welche

um diesen Punkt fünf Winkel bilden. Verbindet man nun die Endpunkte dieser Linien durch die geraden ab, bc, cd, df und fa, so entstehet das Fünfeck abcdf.

Ein Dreyeck, Viereck oder Fünfeck heißt unregelmäßig oder unordentlich, wenn weder alle Seiten noch alle Winkel darin gleich sind.

Regelmäßig oder ordentlich wird ein Dreyeck, Viereck oder Fünfeck, genannt, wenn in ihm alle Seiten und Winkel gleich sind.

Ueberhaupt heißt eine Figur regelmäßig oder ordentlich, wenn sie lauter gleiche Seiten und Winkel hat; unregelmäßig oder unordentlich aber, wenn weder alle Seiten noch alle Winkel gleich sind.

Das ungleichseitige Dreyeck, das ungleichseitige Viereck sind unregelmäßige, aber das gleichseitige Dreyeck und das Quadrat sind regelmäßige Figuren.

Das Fünfeck abcdf ist ebenfalls unordentlich, allein

Tafel 80.

Oben. Das Fünfeck bcdfa ist ein regelmäßiges oder ordentliches.

Diese Erklärungen von ordentlichen und unordentlichen Figuren sind blose Worterklärungen.

Mitten und **Unten** ist ein Fünfeck in dem Kreise, ein Kreis um das Fünfeck, ferner ein Kreis in dem Fünfeck, und ein Fünfeck um den Kreis beschrieben, wovon die Erklärungen leicht zu geben sind.

Anmerkung. Um nicht zu weitläufig zu werden, übergehen wir hier eine gleiche Behandlung der Sechsecke und Siebenecke; überzeugt, daß der verständige Lehrer sie leicht ersetzen und der lernbegierige Schüler leicht fassen wird. Daher nur noch eine Erklärung zum Schlusse.

Vielecke oder Polygone heissen alle Figuren, welche mehr als vierseitig sind. Was man unter regelmäßigen und unregelmäßigen Vielecken verstehe, ist nun von selbst klar. Noch bemerke man, daß eine gerade Linie, welche allen Seiten eines Vielecks zusammengenommen gleich ist, der Perimeter oder die Umfangslinie genannt wird.

Tafel 81.

Oben. Wenn die gerade Linie ca, mit ihrem einen Endpunkte c unbeweglich, sich in der Ebene des Papieres einmal ganz und gar herumbeweget, bis sie wieder in ihre erste Lage ca zurückekehrt, so beschreibet ihr Endpunkt a eine krumme, in sich selbst zurückkehrende Linie aghfa, welche man die Kreislinie nennt.

Die von der Kreislinie eingeschlossene Ebene heißt die Kreisfläche.

Halbmesser oder auch Radius des Kreises heißt jene gerade Linie, aus deren Umdrehung der Kreis entstand. Der unbewegliche Endpunkt c des Halb-

messers heißt Mittelpunkt, der bewegliche a der beschreibende Punkt der Kreislinie.

Diese Erklärungen von Kreislinien und Kreisflächen sind Sacherklärungen.

Aus dieser Entstehung der Kreislinie läßt sich dieselbe auch so erklären: Die Kreislinie ist eine in sich selbst zurückelaufende krumme Linie, worin alle Punkte vom Mittelpunkte gleiche Entfernung haben.

Die Kreisfläche ist eine Figur, weil sie eine allseitig begrenzte Ebene ist.

Unter Peripherie oder Umfang des Kreises versteht man die krumme Kreislinie selbst. Jeder Theil von ihr, z. B. fbh, heißt ein Bogen des Kreises oder Kreisbogen.

Wenn man den Halbmesser ac rückwärts verlängert, bis er den Umfang in h erreicht, so heißt diese gerade Linie ha Durchmesser oder Diameter des Kreises. Da ch so wie ca ein Halbmesser ist, so bestehet der Durchmesser aus zwey Halbmessern.

Es ist klar, daß in jedem Kreise alle Halbmesser und alle Durchmesser gleich sind.

Der Durchmesser theilt den Kreis in zwey gleiche Theile, wovon jeder ein Halbkreis heißt. Für den Durchmesser ha ist hfa der eine, und hga der andere Halbkreis.

Wenn der Bogen agd der vierte Theil des ganzen Umfanges ist, so heißt er ein Quadrant. Auch versteht man bisweilen unter Quadrant das Stück

der Kreisfläche acdga, welches von dem vierten Theile der Peripherie agd und den zwey Halbmessern ac und dc begrenzt wird.

Unten. Eine Sehne oder Chorde heißt jede gerade Linie im Kreise, welche die Peripherie in zwey Punkten schneidet und nicht durch den Mittelpunkt gehet. Zu jeder Sehne gehören zwey Bogen, ein kleinerer und ein größerer, welche zusammen die ganze Kreislinie bilden.

Wenn ab eine Sehne im Kreise um den Punkt c ist, so gehört sowohl der Bogen anb als auch der Bogen amb zu dieser Sehne.

Abschnitt heißt jenes Stück der Kreisfläche, welches von einer Sehne und dem dazugehörigen Bogen eingeschlossen ist.

Jede Sehne bildet mit den dazugehörigen zwey Bogen auch zwey Abschnitte, wovon der eine der größere, der andere der kleinere ist.

Die Sehne ab bildet zwey Abschnitte, wovon der eine anba, der andere amba ist.

Ein Ausschnitt oder Sector ist jener Theil der Kreisfläche, welcher von zwey Halbmessern und dem zwischen ihnen liegenden Bogen enthalten ist.

Die Halbmesser cm und cd bilden mit dem Bogen md den Ausschnitt mcdm.

Der Winkel des Ausschnitts heißt jener Winkel, welchen die zwey Halbmesser bilden, z. B. der Winkel mcd.

Tafel 82.

Oben. Unter Mittelpunktswinkel versteht man jene Winkel im Kreise, deren Scheitel im Mittelpunkte liegen, und deren Schenkel zwey Halbmesser sind.

Der Bogen zwischen seinen Schenkeln heißt der Bogen, worauf er steht.

Der Winkel acb ist folglich ein Mittelpunktswinkel, der auf dem Bogen ab stehet.

Peripheriewinkel, oder auch Kreiswinkel heissen jene, deren Scheitel in der Peripherie liegen, und deren Schenkel Sehnen des Kreises sind. Auch hier heißt der zwischen diesen Schenkeln liegende Kreisbogen der Bogen, worauf er steht.

Der Winkel adb ist ein Peripheriewinkel, welcher auf dem Bogen ab stehet.

Unten. Ein Winkel, dessen Scheitel ausserhalb des Kreises liegt, dessen Schenkel, in ihrer Verlängerung, zu Sehnen des Kreises werden, heißt ein äusserer Winkel am Kreise. Ein innerer aber wird jener genannt, dessen Scheitel in der Kreisfläche liegt und der mit seinen Schenkeln die Peripherie schneidet.

Demnach ist Winkel abd ein äusserer und Winkel fhg ein innerer Winkel am Kreise.

Tangente oder Berührungslinie heißt jene gerade Linie ausserhalb des Kreises, welche diesen Kreis nur in einem einzigen Punkte berühret.

Die Linie mn, welche die Kreislinie nur im Punkte q berühret, ist die Tangente. Auch diese Erklärung ist eine blose Worterklärung.

Tafel 83.

Oben. Concentrische Kreise heissen jene, welche aus dem nämlichen Mittelpunkte, mit verschiedenen Halbmessern, beschrieben sind.

Die Kreise dfh und bmn, welche aus dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte c mit ungleichen Halbmessern cd und cb beschrieben sind, sind also concentrische Kreise.

Ring heißt jene Figur, welche von den Peripherien zweyer concentrischen Kreise eingeschlossen wird.

dfhdbmnb ist daher der Ring, welcher aus den beyden hier gezeichneten Kreisen entsteht.

Man sieht leicht, daß dieser Ring übrig bleibt, wenn man von der großen Kreisfläche die kleine hinwegnimmt.

Unten. Zwey Kreise, welche zwey Punkte ihrer Peripherien gemein haben, heissen schneidende Kreise.

Von dieser Art sind die Kreise um c und d, welche sich in den Punkten m und n durchschneiden.

Tafel 84.

Kreise, welche nur einen Punkt gemein haben, heissen: sich berührende oder Berührungskreise.

Diese Berührung geschieht entweder von innen oder von aussen.

Die beyden aus n und m (**Oben**) beschriebenen Kreise sind Berührungskreise von innen, die aus g und f (**Unten**) beschriebenen Kreise berühren sich von aussen.

Der

Geometrischen Anschauungslehre

Vierter Cursus.

Vierter Cursus.

Hier betrachten wir I. die Abkürzungszeichen, II. die Grundsätze und Foderungen, III. den Begriff, die Hauptttheile und die Methode der Mathematik.

I. Abkürzungszeichen.

Unter Abkürzungszeichen versteht man jene willkührlich gewählte, von allen Mathematikern angenommene Zeichen, welche sowohl zur Abkürzung, als zur bequemern Uebersicht des mathematischen Vortrags dienen.

Die gebräuchlichsten sind nachfolgende:

1) Zwey gleiche Parallelstriche oder $=$, als das Zeichen der Gleichheit. Es deutet an, daß jene Größen, zwischen welchen es sich befindet, gleich sind. Wenn z. B. von zwey geraden Linien, welche ab und cd heissen, eine so groß als die andere ist, so wird dieses mit $ab = cd$ bezeichnet. Wäre noch eine dritte gerade Linie fg so groß, als jede der beyden vorigen, so setzte man $ab = cd = fg$.

Wären abc und dfg zwey Winkel, welche von gleicher Größe sind, so wird dies angedeutet, wenn man schreibt: W. abc = W. dfg.

2) Zwey kleine gerade Linien, welche einen spitzen Winkel bilden, oder: <, sind das Zeichen der Ungleichheit. Die kleinere Größe wird an dessen Spitze, die größere an dessen Oeffnung gesetzt. Wenn z. B. ab eine kleinere, cd eine größere gerade Linie bezeichnet, so heißt ab < cd so viel als: die gerade Linie ab ist kleiner als die gerade Linie cd. Umgekehrt, heißt cd > ab so viel als: die gerade Linie cd ist größer, als die gerade Linie ab.

Bezeichnet man durch abc einen stumpfen, durch fgh einen spitzen Winkel, so setzt man W. abc > W. fgh; oder auch W. fgh < W. abc.

Heißt der größere Winkel o, der kleinere u, so ist o > u und u < o.

3) Ein liegendes lateinisches S, oder ∽ ist das Zeichen der Aehnlichkeit. Wenn z. B. abc und fgh zwey Dreyecke benennen, welche ähnlich sind, so bemerkt man dieses durch Dr. abc ∽ Dr. fgh.

Wenn die Buchstaben abcd und fgmn zwey ähnliche Vierecke bezeichnen, so schreibt man kurz: V. abcd ∽ V. fgmn.

4) Da die Congruenz in der Gleichheit und Aehnlichkeit zugleich besteht, so ist auch das Zeichen der Congruenz aus dem Gleichheits- und Aehnlichkeitszeichen zusammengesetzt, nämlich dieses $\cong$.

Es heißt also der Ausdruck: Dr. fgh $\cong$ Dr. abc, so viel, als: das Dreyeck fgh und das Dreyeck abc sind congruente Dreyecke.

Wenn fghm und abcd zwey congruente Vierecke bezeichnen, so heißt dieses kurz: fghm $\cong$ abcd.

5) Um einen Winkel zu bezeichnen, bedienet man sich des Zeichens: $\measuredangle$ (wofür wir, in der Folge, W. setzen werden). Es heißt also: $\measuredangle$ abc, $\measuredangle$ d, $\measuredangle$ x soviel als: Winkel abc, Winkel d, Winkel x.

Der Ausdruck: W. a = W. b, oder: W. x > W. u, oder: W. abc < W. dfg ist also leicht zu verstehen.

6) Das Zeichen des Dreyecks ist dieses: Δ. Daher heißt Δ abc soviel als: das Dreyeck abc.

Die Ausdrücke:

Δ abc > Δ bcf,
Δ mhn < Δ fgb,
Δ agh $\sim$ Δ mdc,
Δ cgh $\cong$ Δ abn,
Δ bdf = Δ agn sind demnach leicht mit blosen Worten auszudrücken.

7) Zur Bezeichnung des rechten Winkels dienet der lateinische Buchstabe R, und der Ausdruck: W. abc = R heißt: der Winkel abc ist ein rechter Winkel.

Wenn der Winkel gfh ein spitzer ist, so schreibt man: W. gfh < R, und wenn mnd ein stumpfer ist, so wird W. mnd > R gesetzt.

8) Um anzudeuten, daß zwey gerade Linien gleichlaufend oder parallel sind, setzt man das

Zeichen ⋕ zwischen die Buchstaben, womit solche Linien bezeichnet sind. Es heißt also: ab ⋕ cd soviel als: die gerade Linie ab ist mit der geraden Linie cd gleichlaufend oder parallel.

Der Ausdruck: ab ⋕ cd ⋕ mn heißt: die drey geraden Linien ab, cd und mn sind mit einander gleichlaufend.

9) Das Zeichen des Hinzusetzens ist ein kleines stehendes Kreuz, oder +, welches zwischen jene Größen gesetzt wird, welche man zusammen zu einer einzigen Größe verbinden soll. Man spricht es durch zu, oder: darzugesetzt, oder: plus aus.

So heißt z. B. 7 + 5 + 10 soviel, als die drey Zahlen: 7, 5 und 10, sollen in eine einzige Zahl gebracht (addirt oder summirt) werden. Da nun hieraus die Zahl 22 entstehet, so ist 7 + 5 + 10 = 22.

Wenn man aus dem Scheitelpunkte b des rechten Winkels abc eine gerade Linie bd ziehet, welche diesen Winkel in die zwey Theile abd und dbc theilet, so ist hier

W. abd + W. dbc = R, ferner

W. abd < R und auch W. dbc < R.

Zöge man aus b eine Linie bf, welche ausserhalb des Winkels abc fällt, und eine Lage hat, daß W. abf < R, so ist jetzt

W. fbc > R, auch

W. fba + W. abd + W. bdc = W. fbc.

10) Das Zeichen des Hinwegnehmens ist ein kleiner Querstrich, oder —, welcher zwischen zwey

Größen so gesetzt wird, daß die kleinere zur Rechten, die größere zur Linken stehet. Es wird durch weniger oder minus ausgesprochen.

Es heißt also 20 — 8 soviel als 20 weniger 8, d. h. von 20 soll 8 weggenommen (subtrahirt) werden. Da nun hierdurch noch 12 übrigbleibt, so ist $20 - 8 = 12$.

Wenn aus dem Scheitelpunkte m des Winkels cmd eine gerade Linie mg zwischen den Schenkel cm und dm gezogen wird, so ist W. cmd — W. cmg = W. gmd, und W. dmc — W. dmg = W. cmg.

11) Zur Uebung in diesen Abkürzungszeichen setzen wir noch folgende Fragen her. Der Schüler muß ihren Sinn beantworten, und die ihnen entsprechenden Zeichnungen selbst entwerfen.

Was heißt demnach:

ab = cd? oder mn = fh?
bc = gh = ma?
dg $>$ bc? oder ab $<$ dg?
ad $>$ bg $>$ mn $>$ pq?
W. abc = W. hfg?
W. ghf $<$ W. bdr?
W. nhm $>$ W. dgf?
W. bac + nhm = R?
W. gfa $>$ R? oder W. dgf $<$ R?
W. abc — W. dgh = R?
W. gfh — W. gfn = W. nhf?
W. agh = R — W. o?
W. o + W. u = W. x + W. y?
W. abc $>$ W. dbf + W. fbc $>$ R?

$ab \# cd$? oder $df \# bd \# mn$?

$\triangle\, abc \cong \triangle\, mgn$?

$\triangle\, gfh = fhd$? oder $\triangle\, bcd \sim \triangle\, fgh$?

$\triangle\, abd > \triangle\, abf$? $\triangle\, ndf < \triangle\, ndh$?

$\triangle\, abg + \triangle\, agf = \triangle\, abf$? u. s. w.

II. Grundsätze und Foderungen.

A. Grundsätze.

Ein Grundsatz oder Axiom ist ein Satz, der eine Behauptung enthält, welche so klar ist, daß sie für sich selbst schon einem Jeden einleuchtet. Diese Grundsätze sind in der Mathematik von der größten Wichtigkeit, und der Anfänger muß sich durchaus mit denselben bekannt machen, wenn er sich von der Schärfe mathematischer Beweise überzeugen will.

I. Grundsatz.

Jede Größe ist sich selbst gleich.

An der Wahrheit dieses Satzes wird Niemand zweifeln. Z. B. wenn ab eine gerade Linie vorstellt, so ist ab = ab, oder auch ab = ba. Es bezeichne abc einen Winkel, so ist wieder W. abc = W. abc, oder auch W. abc = W. cba. Desgleichen ist 8 = 8, 12 = 12 u. s. f.

II. Grundsatz.

Das Ganze ist so groß, als alle seine Theile zusammengenommen; oder: Alle Theile zusammen sind dem Ganzen gleich.

Wenn man z. B. den Winkel mdn als das Ganze betrachtet, und durch die, aus seinem Scheitel d innerhalb der Schenkel gezogenen, Linien df und dg in die drey Winkel mdf, fdg und gdn, als dessen Theile eintheilet, so ist offenbar:

W. mdn = W. mdf + W. fdg + W. gdn, und auch
W. mdf + W. fdg + W. gdn = W. mdn.

Desgleichen ist 25 = 10 + 8 + 7, und umgekehrt 10 + 8 + 7 = 25; oder auch

$$8 + 10 + 7 = 7 + 8 + 10 = 25,$$

Erläuterung an Dreyecken.

III. Grundsatz.

Das Ganze ist größer als ein Theil, oder einige seiner Theile zusammengenommen; oder: Ein Theil allein, oder mehrere Theile zusammengenommen sind kleiner als das Ganze.

Es bestehe z. B. ein Winkel abc aus den drey Winkeln abd, dbn und nbc, so ist:

W. abc > W. abd, oder W. abc > W. bdn, oder W. abc > W. nbc; ferner:
W. abc > W. abd + W. dbn, oder
W. abc > W. dbn + W. nbc, oder
W. abc > W. abd + W. nbc.

Desgleichen ist auch:

W. abd < W. abc u. s. w., und W. abn < W. abc, oder W. dbc < W. abc u. s. f.

Eben so leicht kann dieser Grundsatz durch Zahlen, so wie durch Figuren, z. B. durch Dreyecke, erläutert werden.

IV. Grundsatz.

Wenn jede von zwey Größen einer dritten Größe gleich ist, so sind jene beyden Größen auch unter sich gleich.

Es seyen A und B die zwey Größen, deren jede der Größe C gleich ist, so wird die allgemeine Form dieses Grundsatzes diese:

$$\text{Wenn} \left\{ \begin{array}{l} A = C \\ B = C \end{array} \right\} \text{so ist auch}$$

$$A = B$$

Da nun z. B. in Zahlen

$$8 + 12 = 20 \text{ und}$$
$$15 + 5 = 20, \text{ so ist auch}$$
$$8 + 12 = 15 + 5$$

Oder: $30 - 6 = 24$, und
$20 + 4 = 24$, folglich
$30 - 6 = 20 + 4$

Es sey ferner:

W. abc + W. cbd = R und
W. fgh + W. hgn = R, so ist auch
W. abc + W. cbd = W. fgh + W. hgn.

Oder: 60 Kreuzer = 1 Gulden
15 Batzen = 1 Gulden
60 Kreuzer = 15 Batzen.

Was folget vermöge dieses Grundsatzes aus nachstehenden Sätzen:

$$\left\{ \begin{array}{l} ab = cd \\ mn = cd \end{array} \right\} \text{folglich?}$$

$$\left\{\begin{array}{l} W.\,o = W.\,u \\ W.\,u = W.\,x \end{array}\right\} \text{folglich?}$$

$$\left\{\begin{array}{r} W.\,x + W.\,u = W.\,y \\ W.\,z = W.\,y \end{array}\right\} \text{folglich?}$$

$$\left\{\begin{array}{l} ab - ad = db \\ dm + mn = db \end{array}\right\} \text{folglich?}$$

$$\left\{\begin{array}{r} W.\,o + W.\,u = R \\ R = W.\,z + W.\,y \end{array}\right\} \text{folglich?}$$

u. s. w.

Folgerungen.

1) $A > B$
$B > C$
$\overline{A > C}$

2) $M < N$
$N < O$
$\overline{M < O}$

3) Aus $P > Q$, und
$Q < S$, folget weder
$P > S$, noch
$P < S$, denn es
kann sowohl $P > S$, als auch $P < S$ seyn.

V. Grundsatz.

Wenn man gleiche Größen zu gleichen Größen setzt, so sind die hierdurch entstehenden neuen Größen (die Summen) gleich.

Es sey $A = B$ und $C = D$, so ist die allgemeine Form dieses Grundsatzes diese:

$$\begin{array}{r} A = B \\ C = D, \text{ folglich} \\ \hline A + C = B + D. \end{array}$$

Wenn W. o = W. u, und
W. x = W. y ist, so ist
auch W. o + W. x = W. u + W. y.

Erläuterung dieses Grundsatzes in Zahlen und in Figuren sind ebenfalls sehr leicht.

VI. Grundsatz.

Wenn man von gleichen Größen, gleiche Größen, hinwegnimmt, so bleiben auch wieder gleiche Größen (gleiche Reste) **übrig.**

Wenn wieder $A = B$ und $C = D$ ist, so ist die allgemeine Form dieses Grundsatzes diese:

$$\begin{array}{r} A = B \\ C = D \text{ folglich} \\ \hline A - C = B - D. \end{array}$$

Es sey ferner

W. abc + W. cbd = R und
W. cbd = W o, so ist
W. abc = R — W. o

Erläuterung an Figuren und Zahlen sind wieder sehr belehrend, um den Anfängern die Anwendung dieses Grundsatzes geläufig zu machen.

VII. Grundsatz.

Wenn man zu gleichen Größen ungleiche setzt, so sind die hieraus entstehenden Größen (Summen) ungleich.

Wenn $A = B$, $C > D$ und $M < N$ ist, so wird dieser Grundsatz folgende zwey allgemeine Fälle enthalten:

1) $A = B$
$C > D$ folglich ist
$A + C > B + D$

2) $A = B$
$M < N$ folglich
$A + M < B + N$.

Andere Erläuterungen darüber.

Folgerungen:

1) $A > B$ und
$M > N$, so ist auch
$A + M > B + N$.

2) $A < B$
$M < N$
$A + M < B + N$.

VIII. Grundsatz.

Wenn man von gleichen Größen ungleiche hinwegnimmt, so müssen ungleiche Größen (ungleiche Reste) übrig bleiben.

Es seye $A = B$, $C > D$ und $M < N$; so giebt dieser Grundsatz Folgendes:

1) $A = B$

$C > D$

$A - C < B - D.$

2) $A = B$

$M < N$

$A - M > B - N.$

Andere Erläuterungen in Zahlen und in ebenen Figuren.

Folgerungen:

1) $A > B$

$P > Q$, so ist sowohl

$A - P > B - Q$, als auch

$A - P < B - Q$ denkbar, wie man leicht in Zahlen erläutern kann.

IX. Grundsatz.

Wenn zwey Größen einander gleich sind, so ist auch jedes Doppelte der einen, dem Doppelten der andern; das Dreyfache der einen, dem Dreyfachen der andern; und überhaupt jedes Vielfache der einen, dem nämlichen Vielfachen der andern gleich.

Dieser Grundsatz ist eine Folge des V. Grundsatzes. Es sey $A = B$, so ist nun auch

$A = B$

$A = B$

$A + A = B + B$, das heißt

$2A = 2B$; folglich sind die Doppelten gleich. Da nun

$$2\,A = 2\,B$$, und auch

$$A = B$$, so ist wieder

$$2\,A + A = 2\,B + B$$, das ist

$$3\,A = 3\,B$$, folglich sind auch ihre Drey-
fachen gleich, u. s. f.

Erläuterungen darüber.

X. Grundsatz.

Wenn zwey Größen einander gleich sind, so sind auch ihre Hälften, ihre Drittheile und überhaupt, ihre gleichvielfachen Theile, einander gleich.

Wenn $A = B$ ist, so sagt dieser Grundsatz Folgendes:

$$\tfrac{1}{2}\,A = \tfrac{1}{2}\,B$$

$$\tfrac{1}{3}\,A = \tfrac{1}{3}\,B$$

$$\tfrac{1}{4}\,A = \tfrac{1}{4}\,B$$

$$\tfrac{1}{5}\,A = \tfrac{1}{5}\,B$$ u. s. f.

Auch dieser Grundsatz ist eine Folge von dem Obigen VII. Grunds. 1. Folg. Denn wenn $\tfrac{1}{2}A$ nicht $= \tfrac{1}{2}B$ seyn sollte, so wäre

$$\tfrac{1}{2}\,A > \tfrac{1}{2}\,B, \text{ oder } \tfrac{1}{2}\,A < \tfrac{1}{2}\,B.$$

Beydes führt aber auf einen Widerspruch. Denn wenn

$$\tfrac{1}{2}\,A > \tfrac{1}{2}\,B$$ und man

setzt wieder $\tfrac{1}{2}\,A > \tfrac{1}{2}\,B$, so müßte

$\tfrac{1}{2}\,A + \tfrac{1}{2}\,A > \tfrac{1}{2}\,B + \tfrac{1}{2}\,B$ seyn, d. h. es wäre $A > B$, welches gegen die Voraussetzung ist.

Setzte man aber:

$$\frac{1}{2} A < \frac{1}{2} B, \text{ und wieder}$$
$$\frac{1}{2} A < \frac{1}{2} B, \text{ so müßte auch}$$
$$\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A < \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} B, \text{ oder}$$
$$A < B$$

seyn, welches der Voraussetzung: $A = B$, ebenfalls widerspricht.

B. Foderungen.

Eine Foderung (oder ein Postulat) ist ein Satz, welcher verlangt, daß etwas ausgeführt werden soll; diese Ausführung ist aber so höchst einfach, daß sie einem Jeden von selbst einleuchtet, und daher keine besondere Anweisung hierzu erfoderlich ist.

Für die Geometrie sind vorzüglich folgende Foderungen von Wichtigkeit.

I. Foderung.

Von jedem gegebenen Punkte, zu einem andern gegebenen Punkte, eine gerade Linie zu ziehen.

Anmerkung. Es ist wohl zu bemerken, daß hier nur von dem Ziehen einer geraden Linie in Gedanken die Rede ist. Wer eine Vorstellung von der geraden Linie hat, darf sich von dem einen Punkte zum andern nur eine gerade Linie denken, so ist die Foderung auch schon erfüllt. Soll man dagegen auf dem Papiere gerade Linien mit der Reißfeder und Tusche ziehen, so ist dieses eine mechanische Aufgabe, zu deren Auflösung gewisse Handgriffe erfoderlich sind, die man

zuerst erlernen muß. Diese Bemerkung gilt von allen hier folgenden Foderungen, daher sie hier ein- für allemal an ihrer Spitze stehet.

II. Foderung.

Jede gegebene gerade Linie zu beyden Seiten zu verlängern.

Auch diese Verlängerung bestehet nur in Gedanken.

III. Foderung.

Von einer größeren geraden Linie einen Theil zu nehmen, welcher einer gegebenen kleinern geraden Linie gleich ist.

IV. Foderung.

In jeder geraden Linie einen, oder mehrere beliebige Punkte anzunehmen.

V. Foderung.

Einen ebenen geradlinigen Winkel zu bilden.

VI. Foderung.

Einen gegebenen Winkel größer oder kleiner zu machen.

VII. Foderung.

Jede Ebene nach allen Seiten zu verlängern, oder zu erweitern.

VIII. Foderung.

Mit jeder gegebenen geraden Linie, in jeder Ebene, einen Kreis zu beschreiben.

III. Begriff, Hauptheile und Methode der Mathematik.

Die Mathematik oder Größenlehre ist die Wissenschaft von den Größen. Eine Größe aber nennt man Alles, was vermehrt oder vermindert werden kann. So sind z. B. die Zahlen, die Linien, die Flächen und Körper Größen, denn alle diese Dinge sind einer Vergrößerung oder Verkleinerung fähig.

Da alle sichtbare Dinge eine gewisse Größe haben, so folget hieraus der große Umfang der Mathematik.

Im Allgemeinen hat sie zwey Hauptheile, die reine und die angewandte Mathematik.

Unter reinen Mathematik versteht man jenen Theil der Mathematik überhaupt, welcher sich blos mit Größen an sich beschäftigt.

Eine Größe an sich betrachten, heißt aber, die Größe blos als solche betrachten, und nicht auf diejenigen wirklichen Dinge Rücksicht nehmen, an welchen sich dieselbe befindet. Wenn man z. B. die Zahl 6 blos als eine Menge von sechs Einheiten, die gerade Linie blos als eine Ausdehnung in die Länge, das Dreyeck blos als eine von drey Seiten eingeschlossene Figur betrachtet, u. s. f. so wird hier die Zahl, die gerade Linie, das Dreyeck blos an sich, d. h. rein betrachtet.

Die angewandte Mathematik ist dagegen jener Theil der Mathematik überhaupt, welcher die

Größe der wirklichen körperlichen Dinge, die in unsere Sinne fallen, betrachtet.

Sie heißt angewandt, weil die Größe überhaupt, auf diese wirkliche körperliche Dinge angewendet wird. Eine Zahl von sechs Menschen, von 80 Häusern, gehört in die angewandte Mathematik; weil dort die Zahl sechs, so hier die Zahl 80, auf wirkliche Dinge, nämlich auf Menschen und Häuser angewendet wird.

Eine gerade Linie, als Höhe eines Thurmes, als Länge und Breite eines Hauses, als Entfernung eines Grenzsteines von dem andern u. s. f. gehört in die angewandte Mathematik, weil sich diese gerade Linie hier an wirklichen Gegenständen, an dem Thurme, dem Hause u. s. w. befinden.

Ein Viereck, als die Gestalt eines Grundstückes, z. B. einer Wiese, eines Gartens u. s. f. gehört wieder in die angewandte Mathematik.

Aus diesen Bestimmungen ist klar, daß die reine Mathematik der angewandten vorhergehen müsse; weil man zuerst die Größen überhaupt, oder an sich kennen muß, ehe sie auf wirkliche Gegenstände des menschlichen Lebens angewendet werden können. Man muß zuerst ein Viereck überhaupt berechnen können, ehe man es unternimmt, die Fläche einer viereckigen Wiese zu bestimmen u. s. w.

Die reine Mathematik theilt man wieder in zwey besondere Theile, welche Arithmetik oder Zahlenlehre, und Geometrie oder Raumlehre heißen.

Die Größen an sich betrachtet, sind von doppelter Art. Ihr Wesen beruhet entweder blos auf der Menge der Theile, woraus sie bestehen, oder es kömmt vorzüglich auf die Art und Weise an, wie diese Theile zum Ganzen verbunden sind.

Jene Größen heißen unstetige oder discrete, diese stetige oder continuirliche Größen.

Die Zahl zwölf bleibt unverändert, in welcher Ordnung die zwölf Einheiten, welche sie bilden, unter sich stehen. Der Werth dieser Zahl hängt also blos von der Menge dieser Einheiten, nicht aber von der Art ihrer Verbindung und gegenseitigen Ordnung ab. Zwölf Menschen z. B. bleiben, der Zahl nach, immer die nämlichen, man mag sich dieselbe, in gerader Linie, oder im Vierecke, oder im Kreise, oder ganz regellos stehend, vorstellen.

Da es nun mit allen Zahlen so ist, so sind die Zahlen unstetige oder discrete Größen. Die Arithmetik, oder Zahlenlehre ist daher jener Theil der reinen Mathematik, der sich mit den unstetigen Größen, oder mit den Zahlen beschäftigt.

Eine gerade Linie, welche man sich in beliebige Theile getheilt denkt, wird nicht mehr dieselbige bleiben, wenn man diese Theile nach anderer Ordnung, als in der geraden Richtung zusammenfüget. Das Wesen der geraden Linie bestehet daher in einem ununterbrochenen, lückenlosen Fortschreiten, nach einer einzigen Richtung. Die gerade Linie ist folglich eine stetige Größe, denn wenn man diesen stetigen Zusammenhang der Linie auflöset, so hört die Linie

selbst auf. Dies gilt eben so von der krummen Linie. Daher sind alle Linien stetige Größen, deren Natur, in dem innigen ununterbrochenen Zusammenhange der Theile zum Ganzen, bestehet.

Eben so ist es mit den Flächen. Ein Dreyeck z. B. wird aufhören zu seyn, was es ist, wenn man sich dasselbe in Stücke getheilt vorstellt, und diese Stücke nach anderer Ordnung zusammensetzt. Folglich sind auch alle Flächen stetige Größen.

Die Geometrie, oder Raumlehre ist daher jener Theil der reinen Mathematik, der von den stetigen oder continuirlichen Größen handelt.

Die stetigen Größen, welche wir bis jetzt kennen gelernt haben, sind Linien und Flächen. Es giebt noch eine dritte Gattung, nämlich die Körper, welche nach Länge, Breite und Tiefe ausgedehnt sind. Diese Körperlehre macht den Schluß der Geometrie, und wir müssen uns hier begnügen, blos das Wort genannt zu haben.

Die Theile der angewandten Mathematik aufzuzählen, gehört ohnedies nicht hierher.

Die Mathematische Methode, d. h. die Art und Weise, die Lehren der Mathematik vorzutragen, besteht darin, daß sie mit Erklärungen anfängt, aus welcher sodann Grundsätze und Foderungen abgeleitet werden. Vermittelst dieser Vordersätze werden sodann Lehrsätze bewiesen und Aufgaben aufgelößt, welchen man, zur ferneren Erweiterung der Wissenschaft, noch Zusätze beyfüget.

Erklärungen sind vollständige Angaben derjenigen Merkmale, wodurch man das Wesen einer Sache erkennet, und im Stande ist, sie von allen andern zu unterscheiden. Z. B.

Quadrat ist jenes Viereck, welches vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel hat.

Kreislinie heißt jene krumme Linie, welche entstehet, wenn sich eine gerade Linie, in derselbigen Ebene, um ihren einen Endpunkt so lange herumbeweget, bis sie in ihre erste Lage zurückgekehrt ist.

Die Erklärungen sprechen entweder deutlich aus, wie die zu erklärende Sache entstehet, oder sie sagen nur, welchen Begriff man mit einem gewissen Worte verbindet. Jene sind die Sacherklärungen, diese die Worterklärungen. Von der ersten Art ist obige Erklärung der Kreislinie, von der letzten aber jene des Quadrates.

(Wichtigkeit dieses Unterschiedes.)

Was Grundsätze und Foderungen sind, ist bereits früher in diesem Cursus beygebracht, und mit Beyspielen erläutert worden. Der verständige Lehrer wird hier deren noch mehrere geben.

Ein Lehrsatz, oder Theorem, ist ein Satz, welcher eine Behauptung enthält, die unter einer vorausgesetzten Bedingung Statt findet. Diese Bedingniß heißt die Hypothesis, jene Behauptung die Thesis des Lehrsatzes.

Zur Vollständigkeit des Lehrsatzes gehört noch der Beweis, d. h. eine zusammenhängende Reihe von

Wahrheiten, wodurch der Verstand genöthigt wird, der Behauptung des Lehrsatzes seinen Beyfall zu geben.

Um dieses alles sogleich zu erläutern, wählen wir folgendes Beyspiel. Denn allgemeine Begriffe müssen den ersten Anfängern jedesmal durch einzelne Anwendungen deutlich gemacht werden.

Lehrsatz.

Der Durchmesser theilet die Kreisfläche in zwey congruente Theile.

Hier ist:

a) Hypothesis, die Voraussetzung einer Kreisfläche, und eines in ihr gezogenen Durchmessers; und

b) Thesis, die Congruenz der beyden Theile, in welche dieser Durchmesser die Kreisfläche theilet.

Beweis.

Des Kreises Durchmesser sey ab, der eine Theil seines Umfanges amb, der andere anb. Denket man sich das eine Stück der Kreisfläche amb, um den unbeweglichen Durchmesser ab, auf die entgegengesetzte Seite geleget, so muß jene Ebene einmal in diese Ebene fallen, da alle Ebenen sich decken können. Sollte nun der Bogen amb den Bogen anb nicht decken, so müßten Punkte von amb nicht in übereinstimmende Punkte von anb fallen. Da aber alle Punkte in amb vom Mittelpunkte c so weit entfernt sind, als alle Punkte in anb, so muß jeder Punkt in amb, auf einen zugehörigen Punkt, in anb fallen, d. h. der ganze Bogen amb muß in den ganzen Bogen anb fallen. Daher

decken sich die beyden Stücke abma und abna, und der Lehrsatz ist bewiesen. (Es ist gut, diesen Beweis an einer wirklichen Zeichnung zu erläutern.)

Eine Aufgabe oder Problem ist ein Satz, welcher eine Foderung enthält, die unter einer gewissen Voraussetzung ausgeführt werden soll. Jene Voraussetzung heißt auch hier die Hypothesis, diese Foderung die Thesis.

Zur Vollständigkeit der Aufgabe gehört sowohl die Auflösung, als der Beweis.

Auflösung heißt die Art und Weise, wie man verfahren muß, um der Foderung der Aufgabe zu entsprechen.

Beweis ist hier die Verbindung von Wahrheiten, wodurch der Verstand von der Richtigkeit der Auflösung überzeugt wird.

Auch diese allgemeine Begriffe sollen durch ein leichtes Beyspiel erläutert werden.

Aufgabe.

Ein gleichschenkeliges Dreyeck, dessen Schenkel eine gegebene Größe haben, zu construiren.

Hier ist:

a) Hypothesis, die Voraussetzung einer gegebenen geraden Linie, und

b) Thesis, die Construction eines Dreyecks, dessen zwey Seiten jener geraden Linie gleich sind.

Auflösung.

1) Man construire eine gerade Linie ab, welche der gegebenen gleich ist,

2) Aus a ziehe man eine gerade af von unbestimmter Größe, und nach einer andern Richtung als nach b,
3) Auf af nehme man ac = ab und ziehe die gerade Verbindungslinie cb, so ist cab das verlangte Dreyeck.

Beweis.

Zufolge der Auflösung ist ca = cb, folglich hat das Dreyeck cab zwey gleiche Seiten. Ein Dreyeck, welches zwey gleiche Seiten hat, heißt aber ein gleichschenkeliges. Daher ist cab ein gleichschenkeliges Dreyeck. Da nun auch jeder dieser Schenkel der gegebenen Linie gleich ist, so ist die Aufgabe aufgelöset.

(Auch hier ist es gut, die leichte Zeichnung mit der Auflösung und dem Beweise zu verbinden.)

Zusätze oder Corollarien heissen alle jene Sätze, welche aus den bewiesenen Lehrsätzen und Aufgaben auf so einfache Weise folgen, daß sie als leichte Folgerungen davon angesehen werden müssen.

Erläuterungen darüber sind leicht beyzubringen.

Schlußwort.

Sind die Schüler, nach dem Geiste dieser Methode, bis hierher geleitet, so können sie mit dem beßten Erfolge in das eigentliche Gebiet der Geometrie eingeführt werden. Besitzt der Lehrer die nöthige Sachkenntniß und Fertigkeit im Vortrage, so kann jedes gute Compendium zum Leitfaden dienen. Doch wird man auch hier stufenmäßig fortschreiten, und zuerst nur die ersten Elemente der Planimetrie vor-

tragen müssen. Die im Ganzen recht wohlgerathene geometrische Constructionslehre des scharfsinnigen und im Vortrage sehr geübten Professors Ladomus, in Carlsruhe, ist hierzu besonders zu empfehlen. Ein Sachkundiger Lehrer wird einige Lücken darin leicht auszufüllen, einige Lehren schärfer zu begründen wissen. Der Verfasser gegenwärtiger Anschauungslehre wird eine solche Elementargeometrie, nach seinem Plane bearbeitet, baldmöglichst folgen lassen. Die Körperlehre erfordert ebenfalls einen eigenen stereometrischen Anschauungs-Cursus als Vorbereitung.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Mainz,
gedruckt bei Johann Wirth, Betzelsgasse, Lit. C. No. 128.

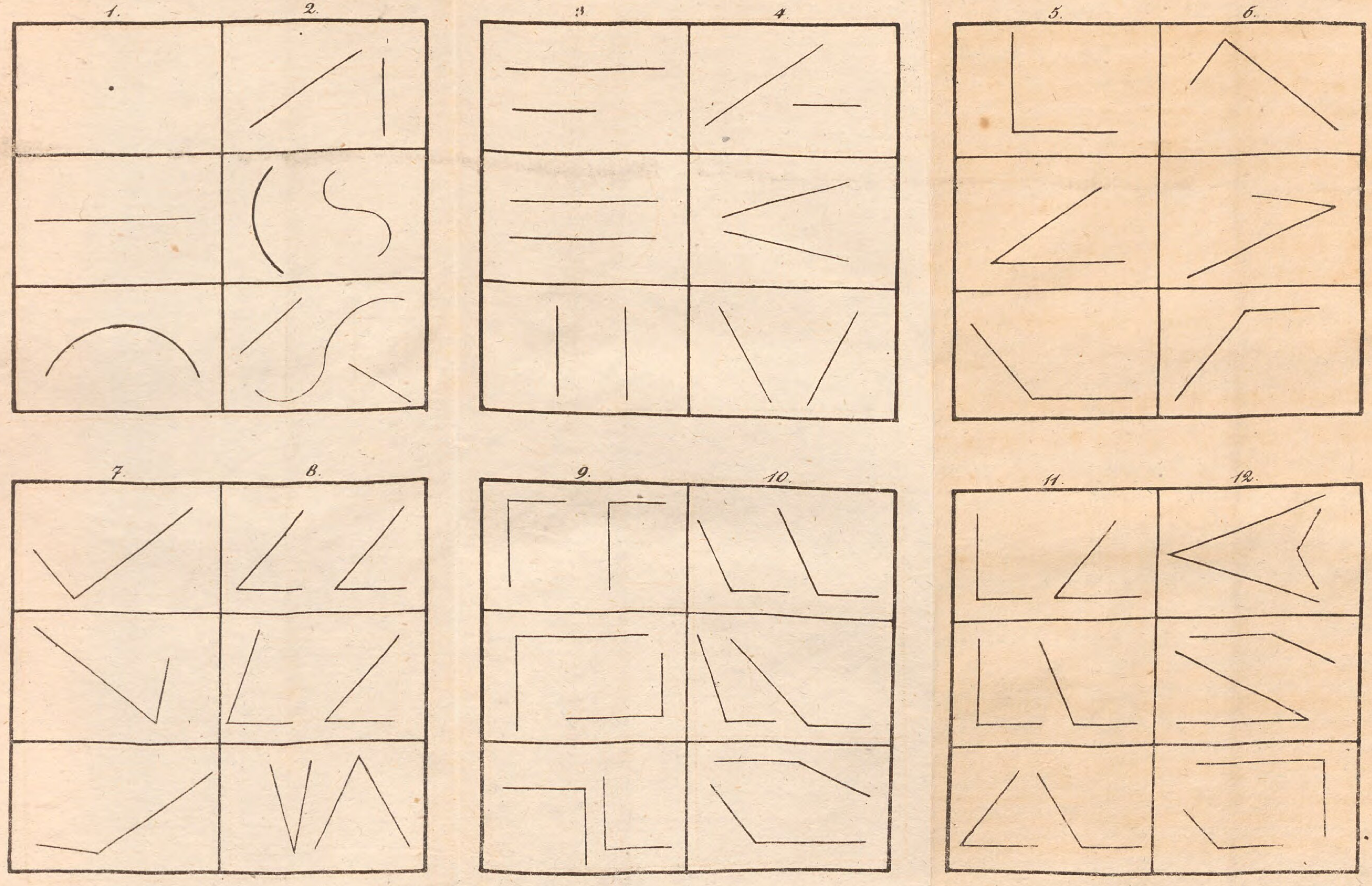
Bericht
an den Buchbinder.

Wenn der Eigenthümer die Tafeln an das Buch will gebunden haben, so wird der Buchbinder ersucht, jede in den beyden weißen Zwischenräumen zu brechen, und die Einrichtung so zu treffen, daß sie ganz können herausgeschlagen werden.

Sollen dagegen je zwey Nummern dieser Tafeln auf dünne Pappe gezogen werden, so wird zu den 42 Täfelchen ein besonderes Futteral, mit der hier unten stehenden Aufschrift, verfertiget.

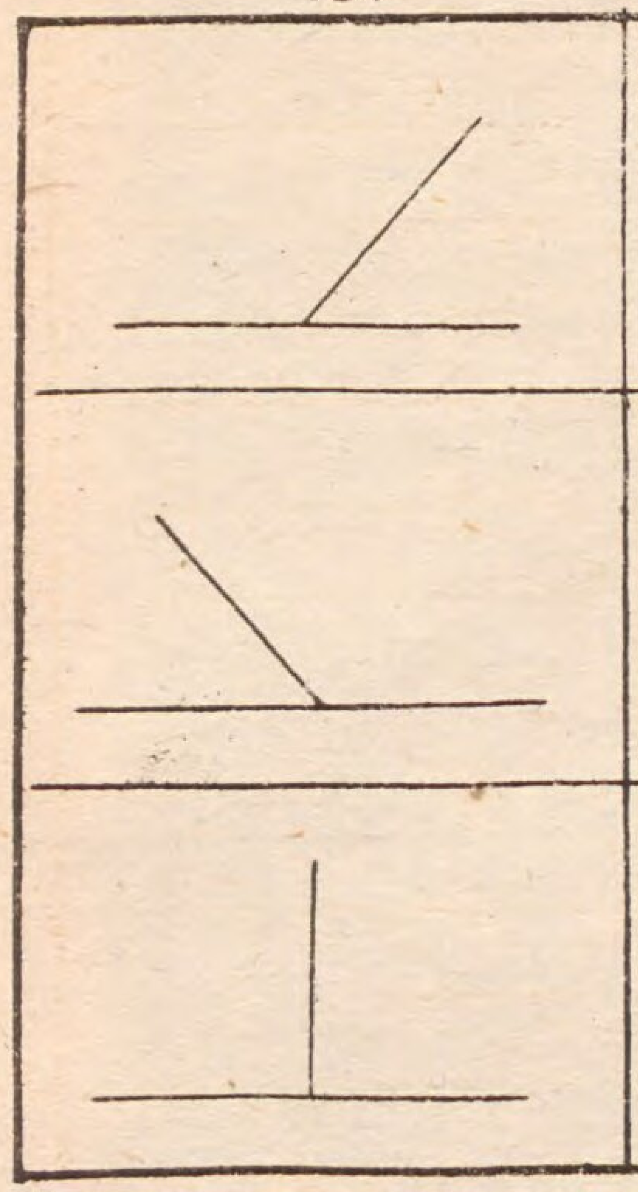
42 Tafeln zur geometrischen Anschauungslehre von Hoffmann.

Tafel I.

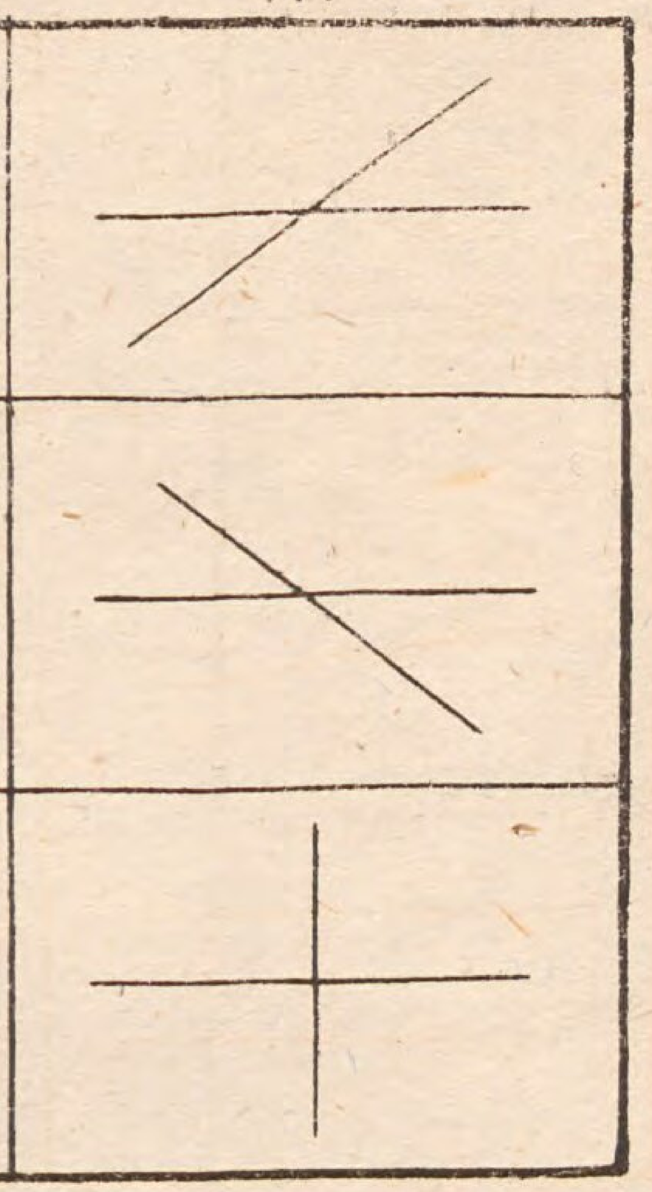


Tafel II.

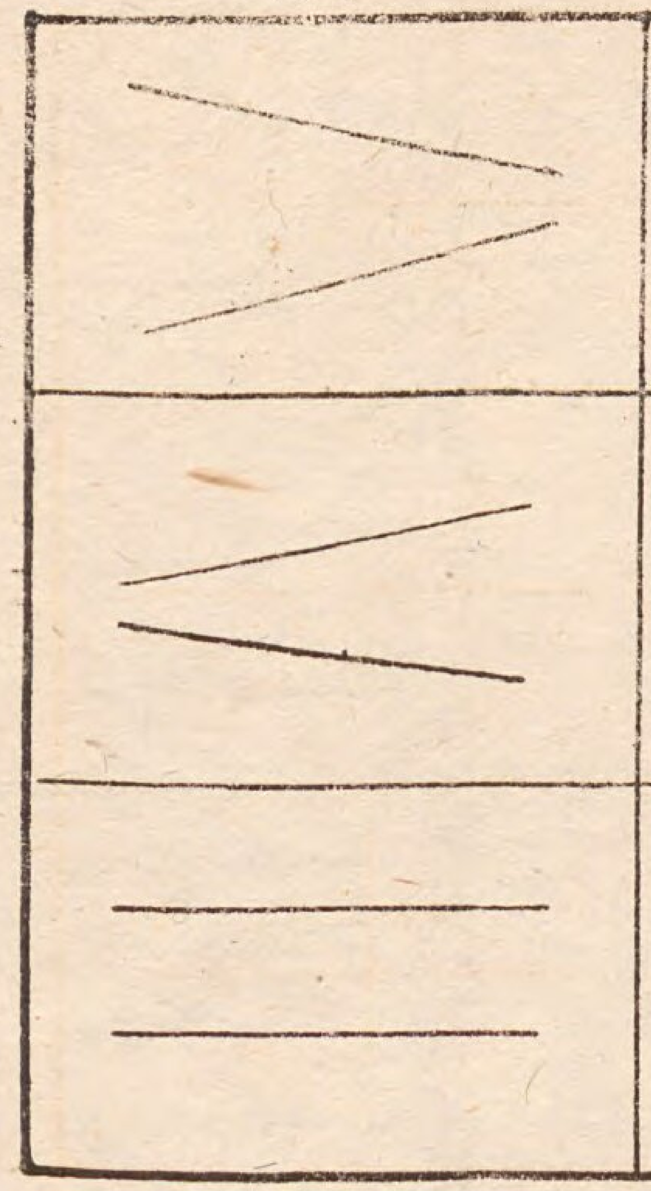
13.



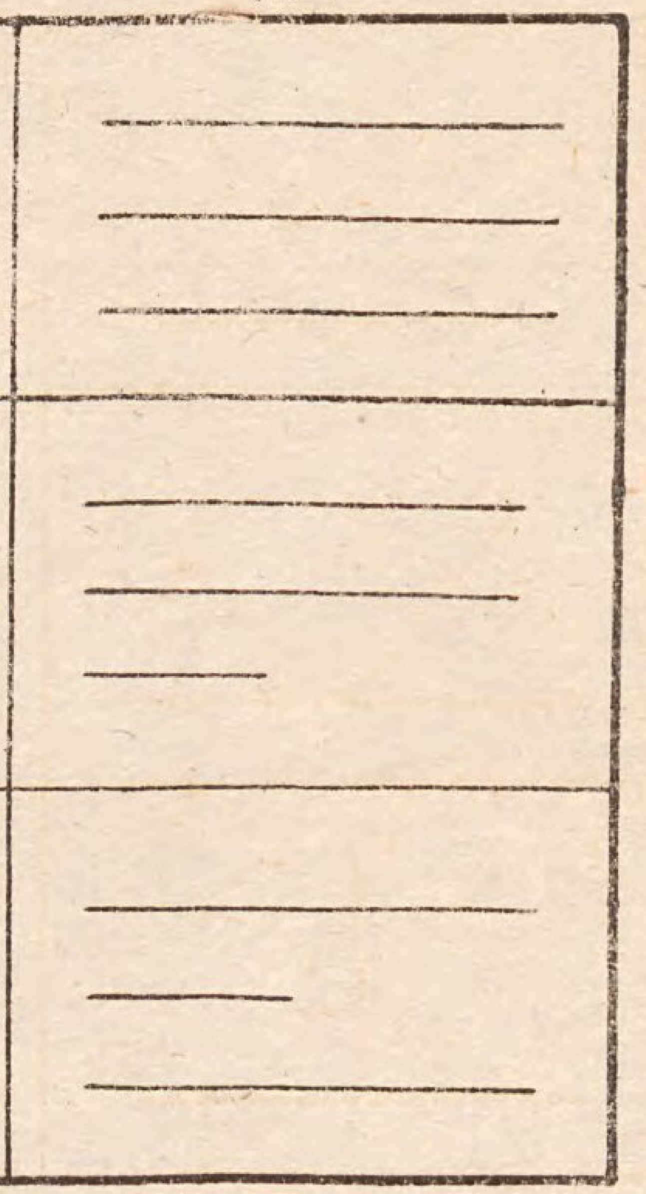
14.



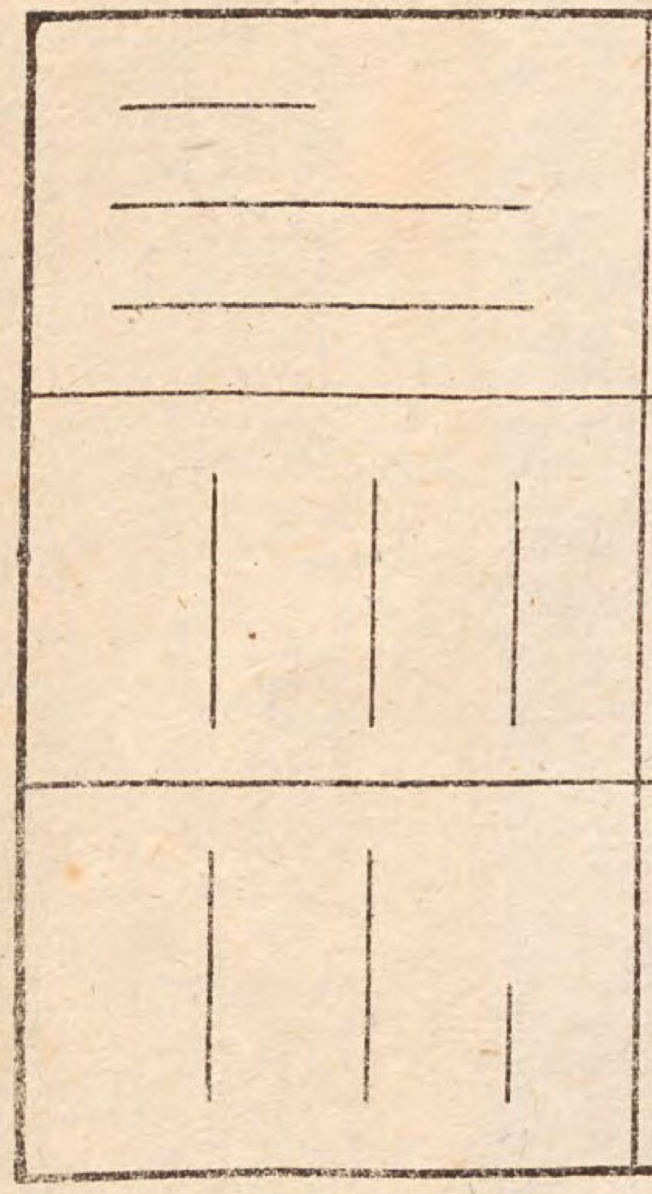
15.



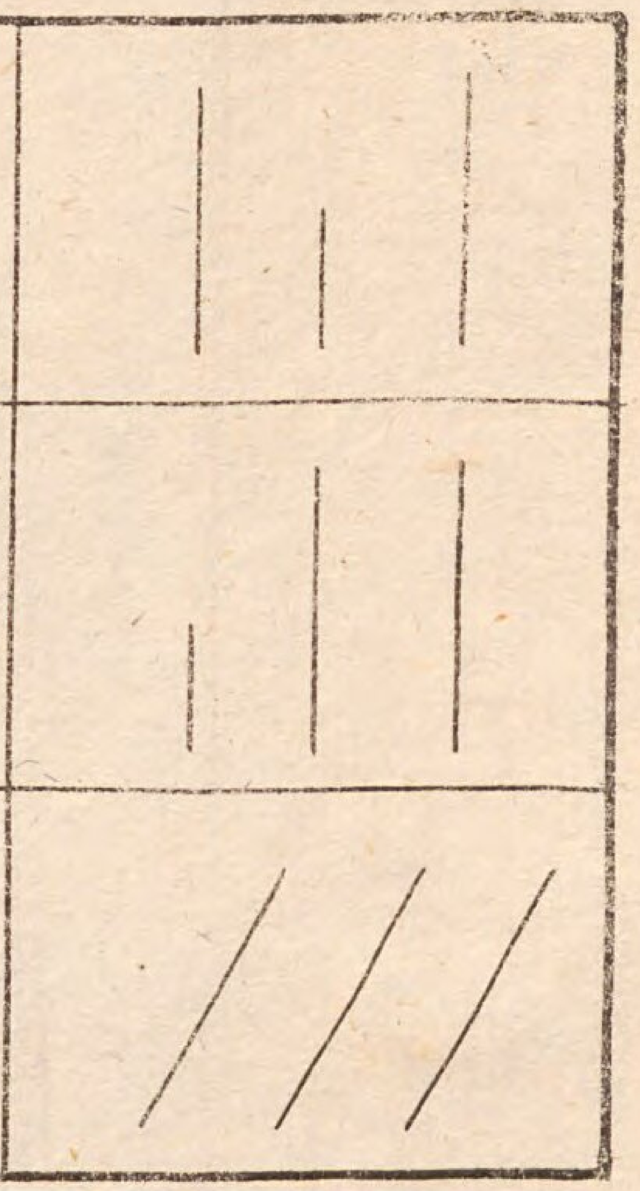
16.



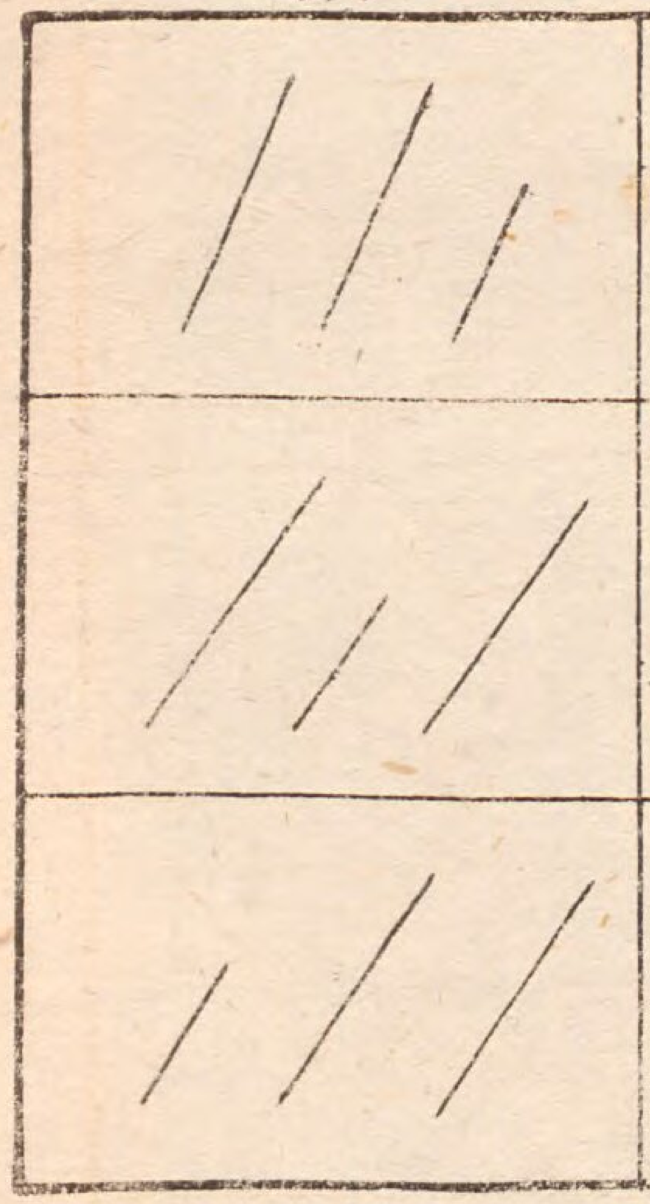
17.



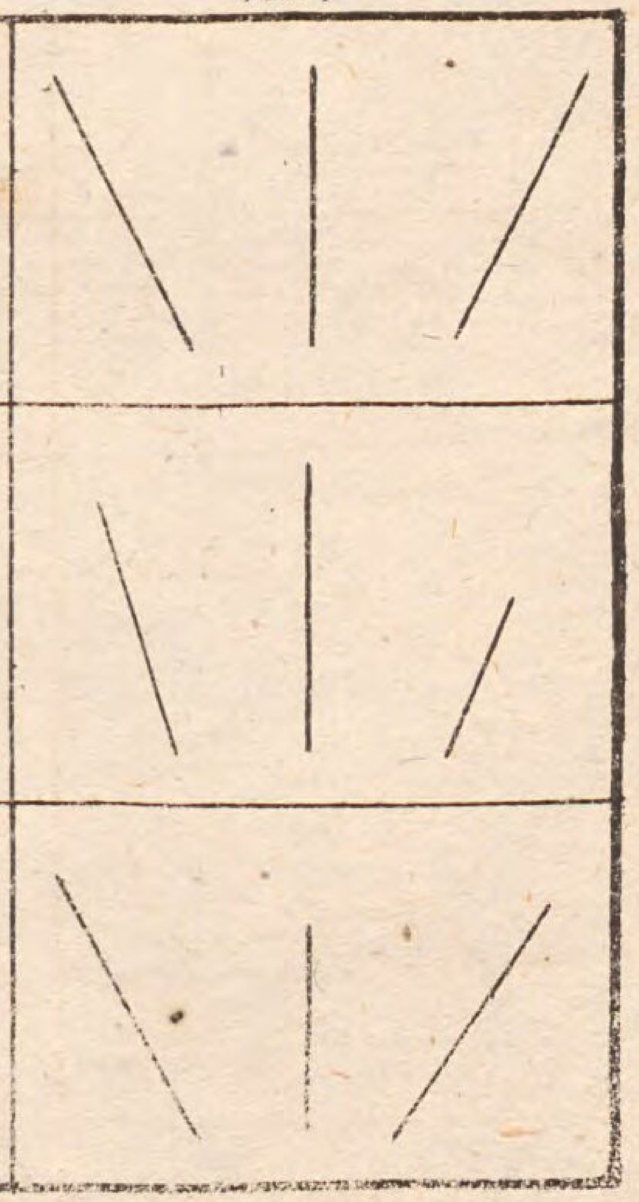
18.



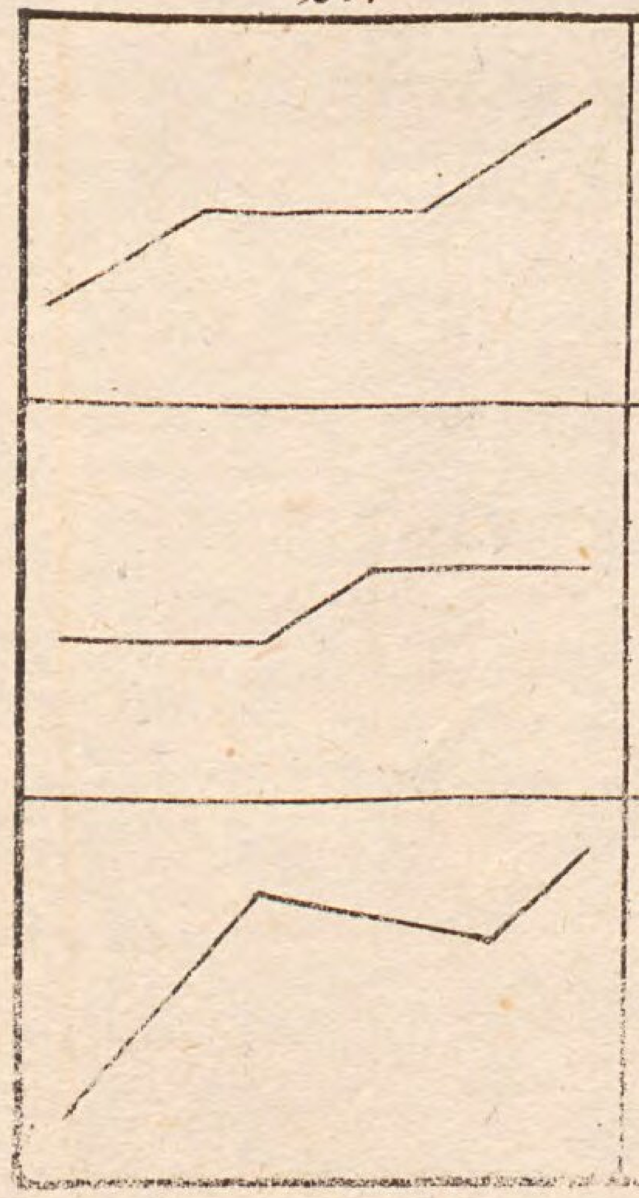
19.



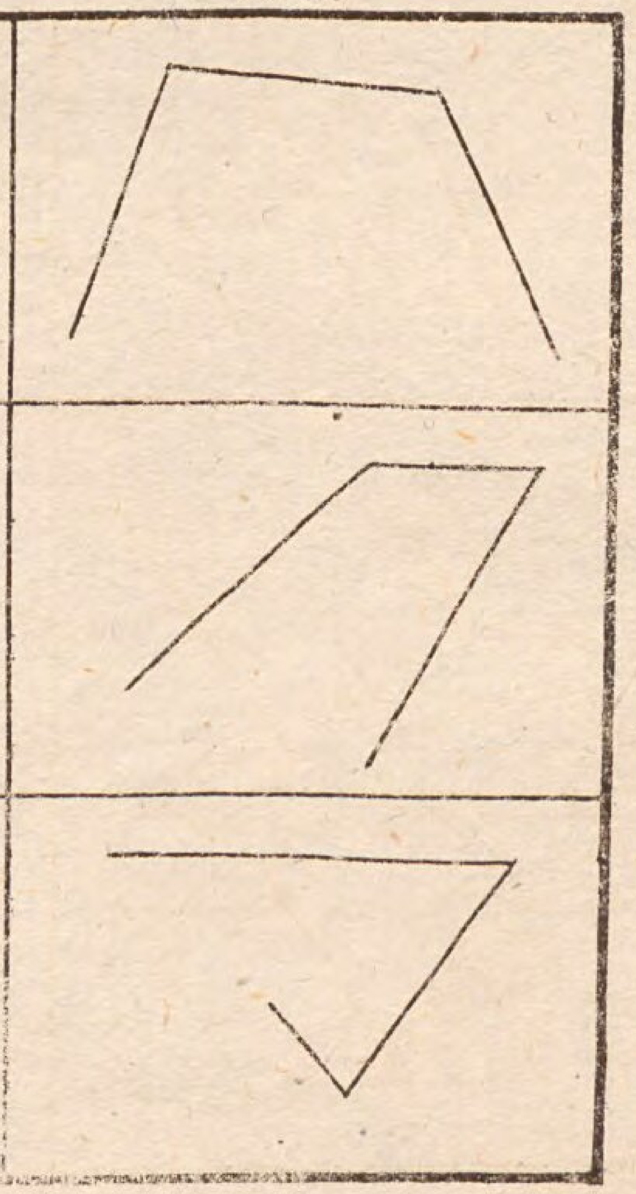
20.



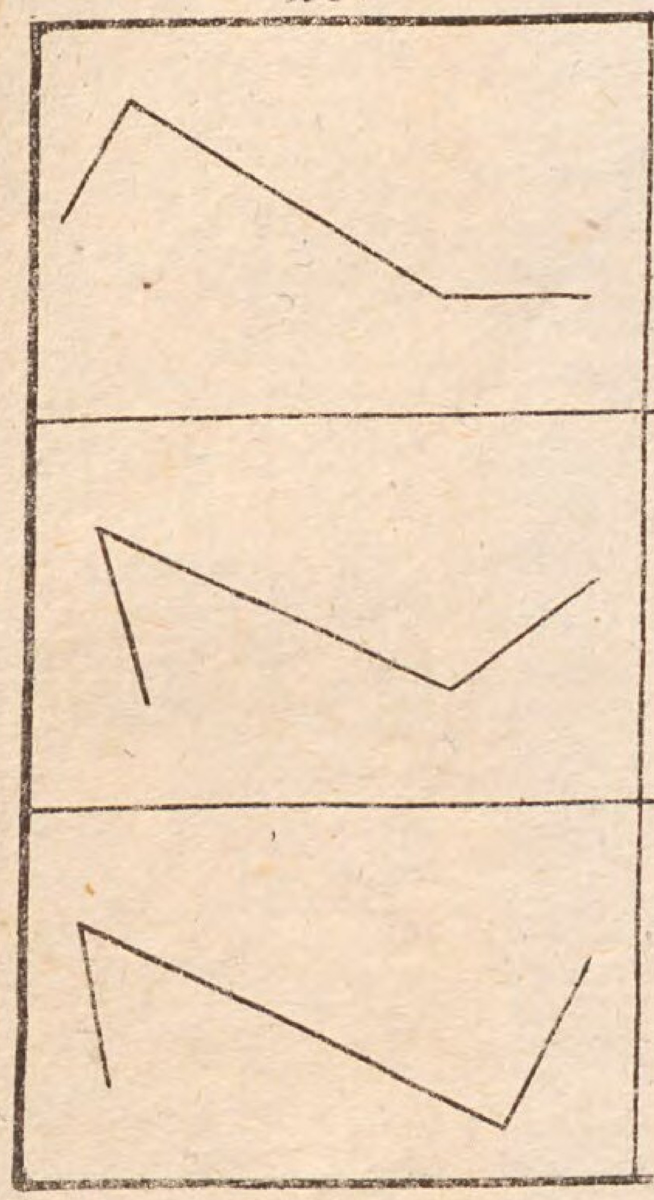
21.



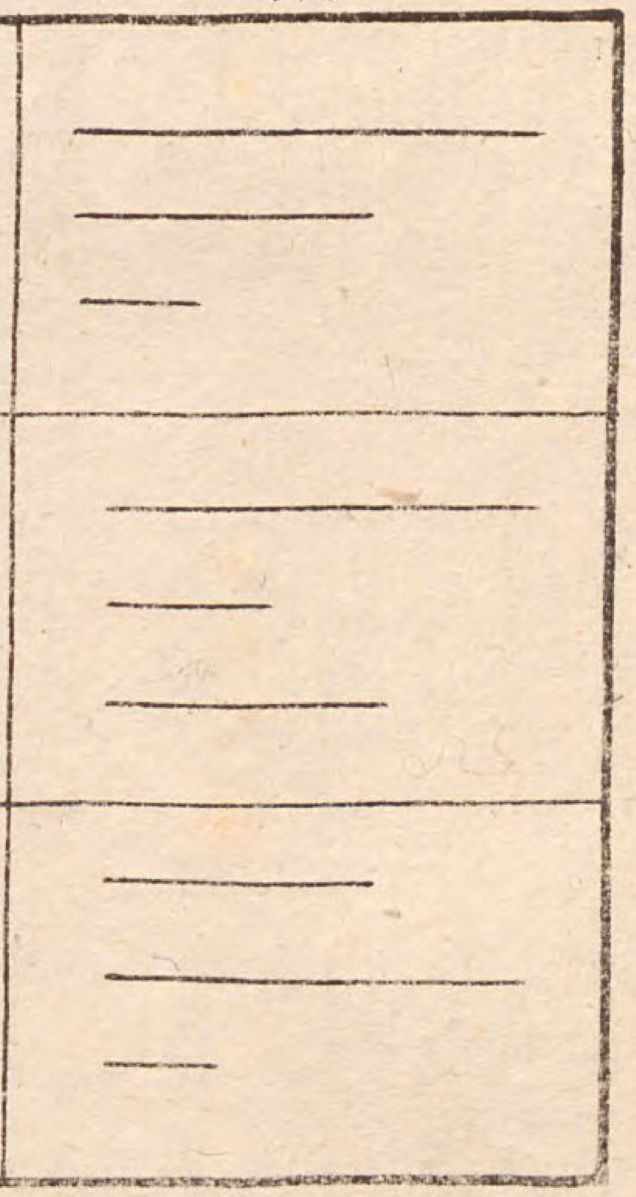
22.



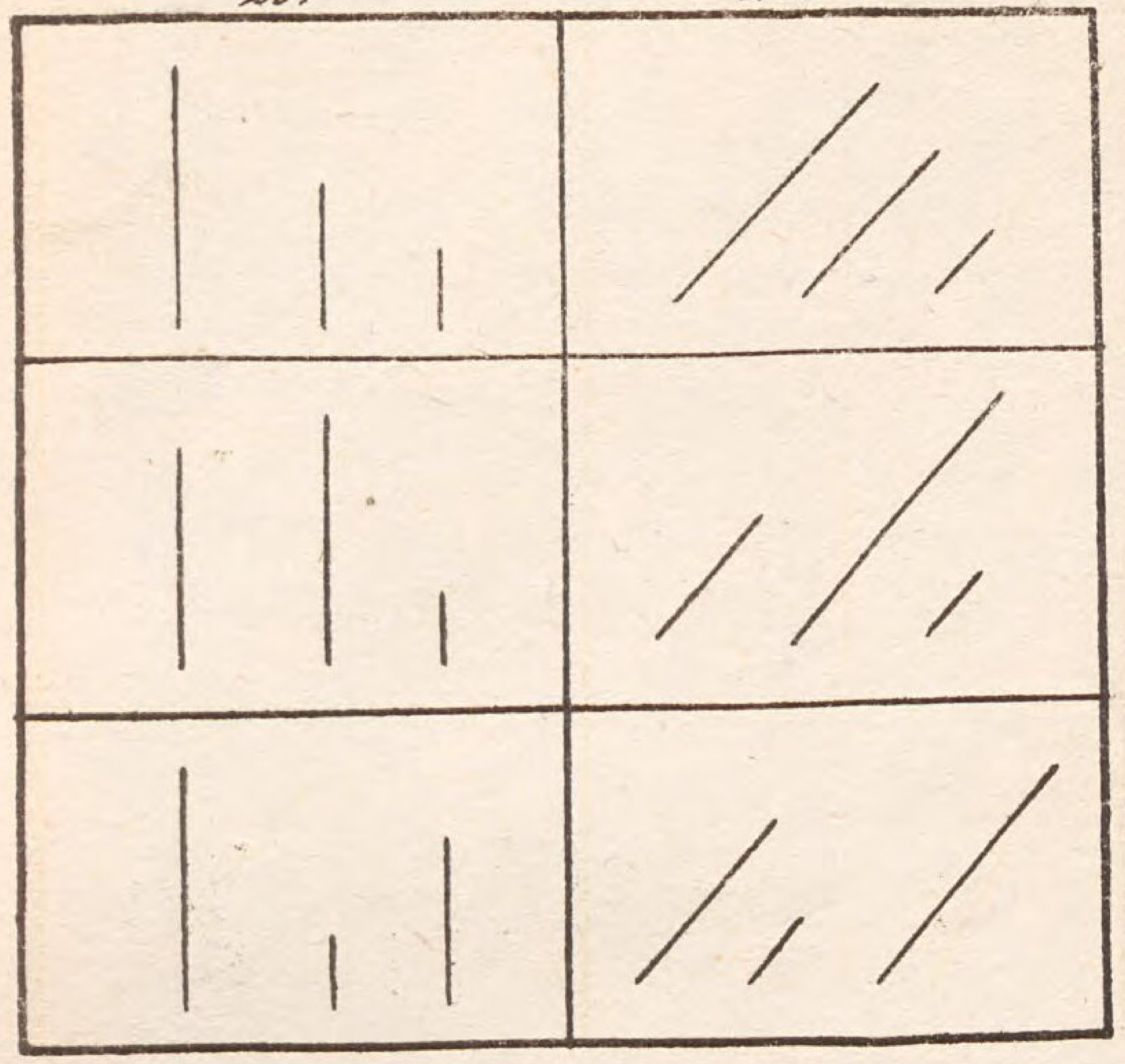
23.



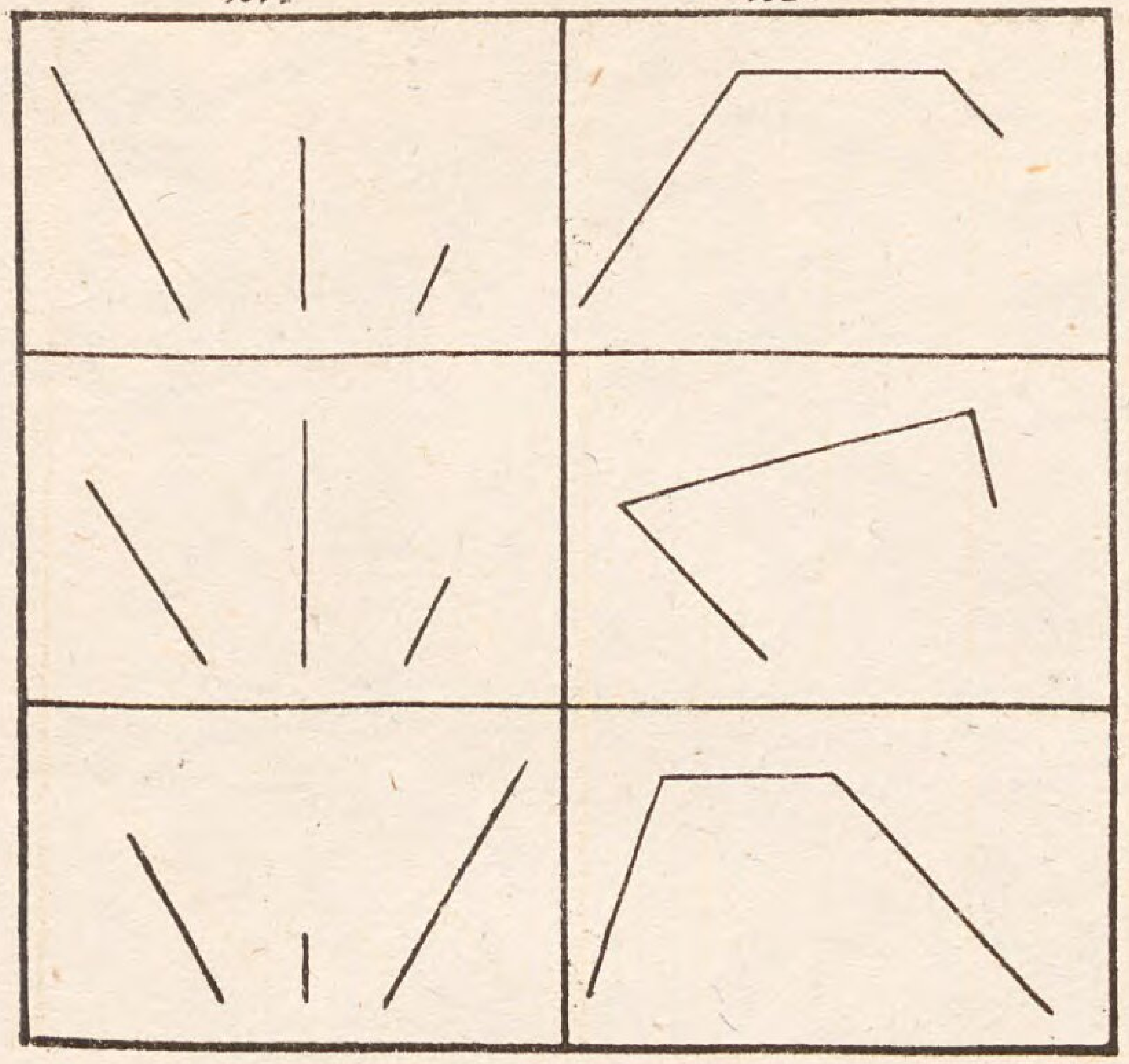
24.



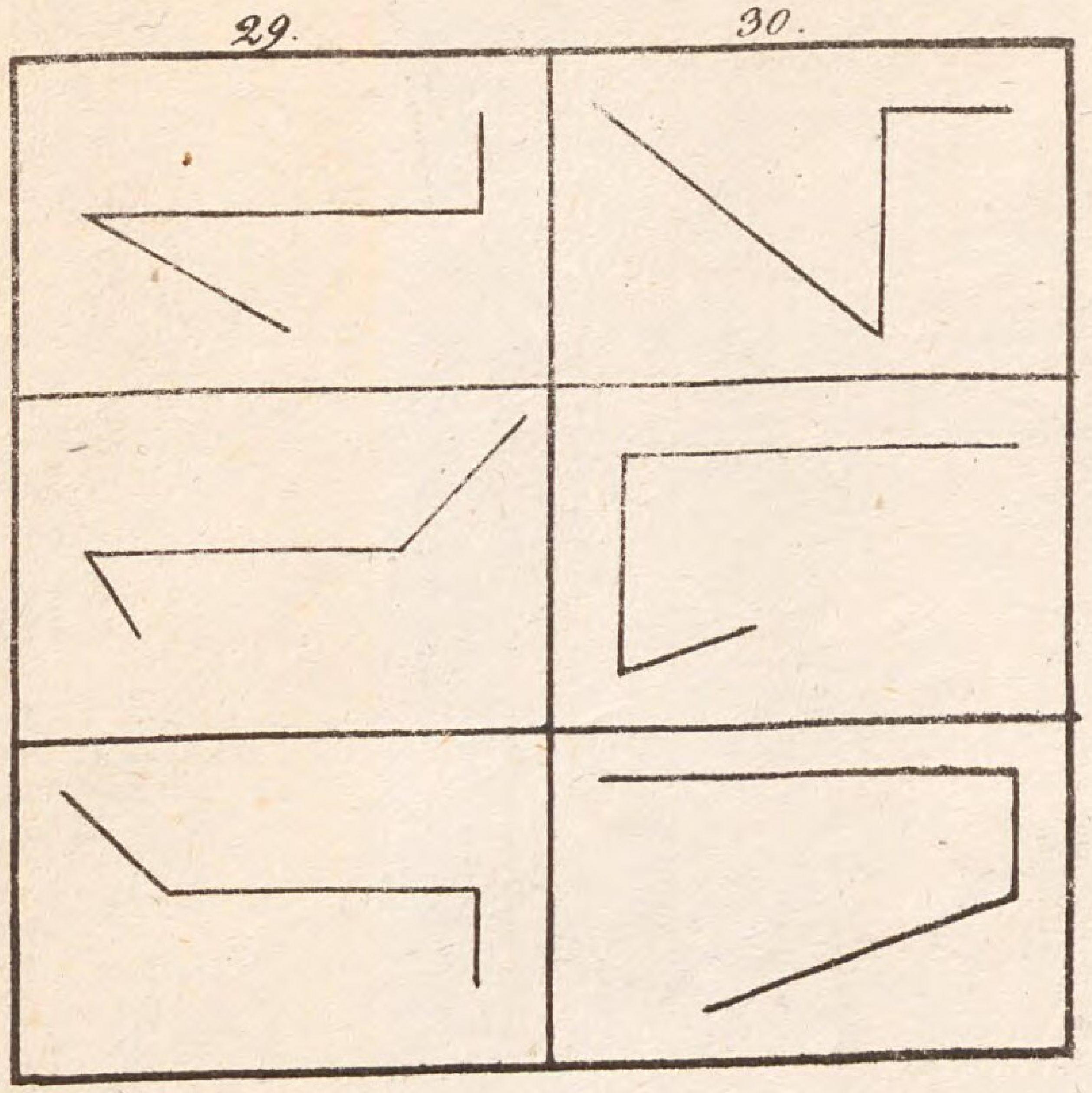
25. 26.



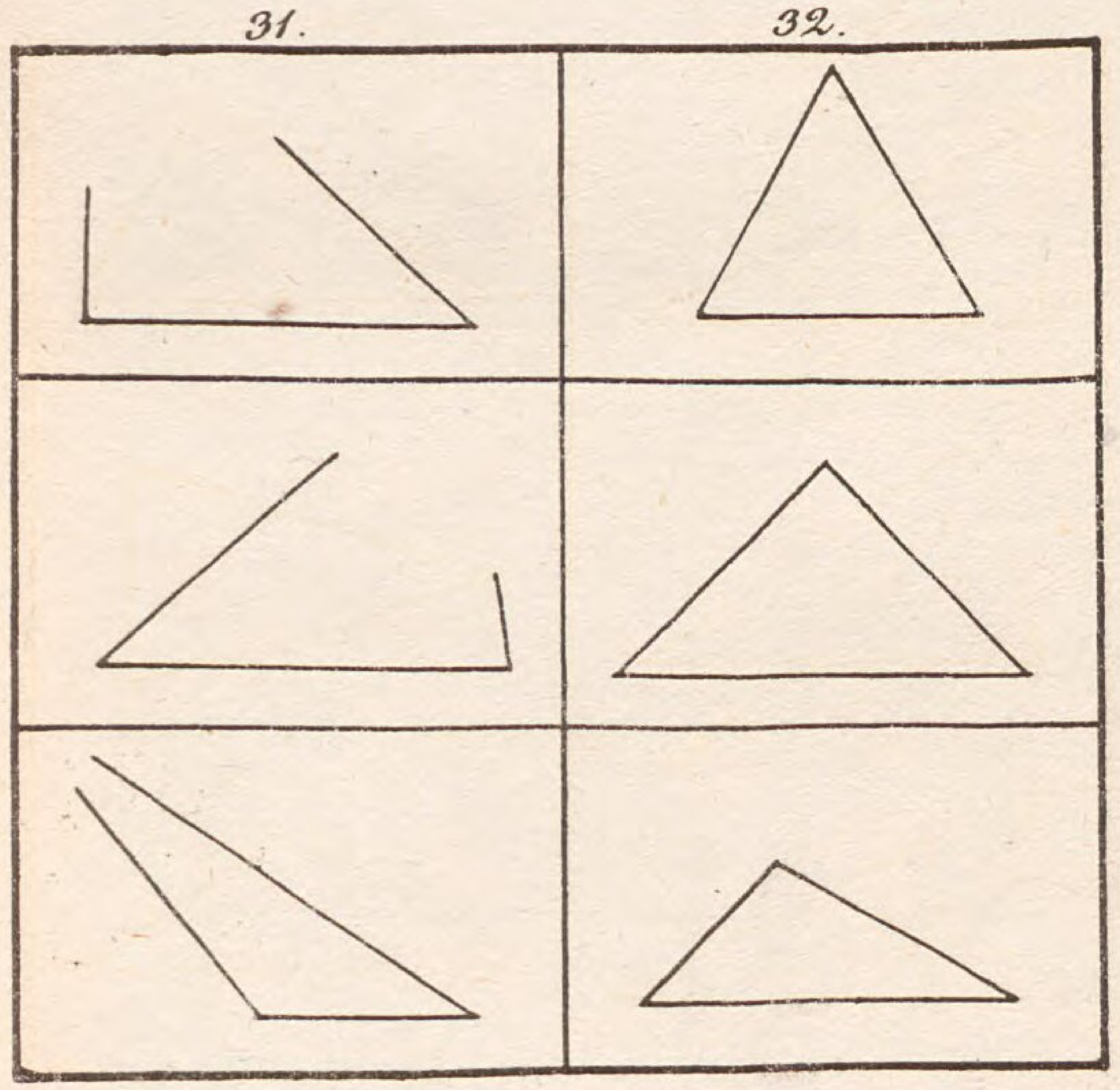
27. 28.



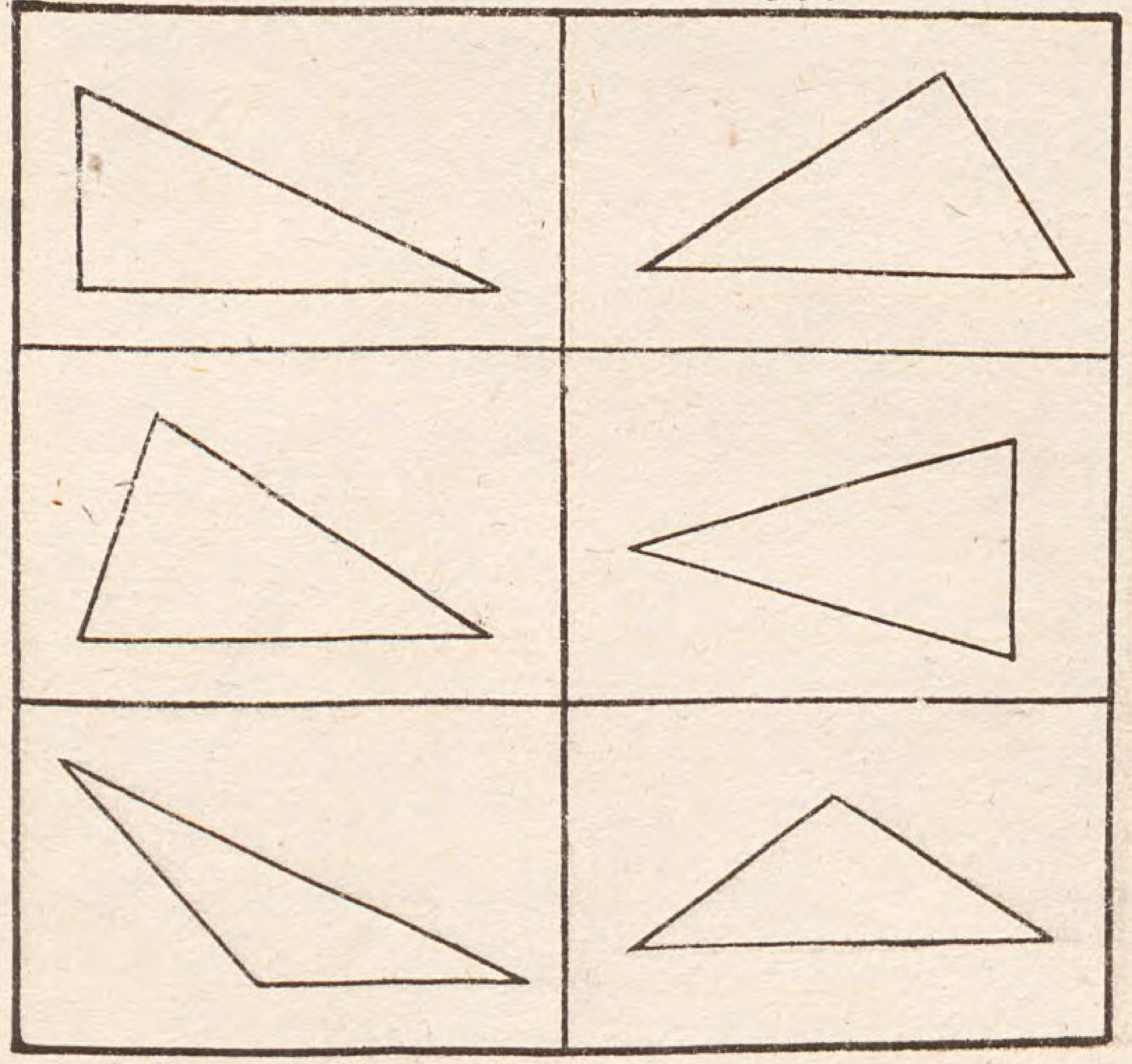
29. 30.



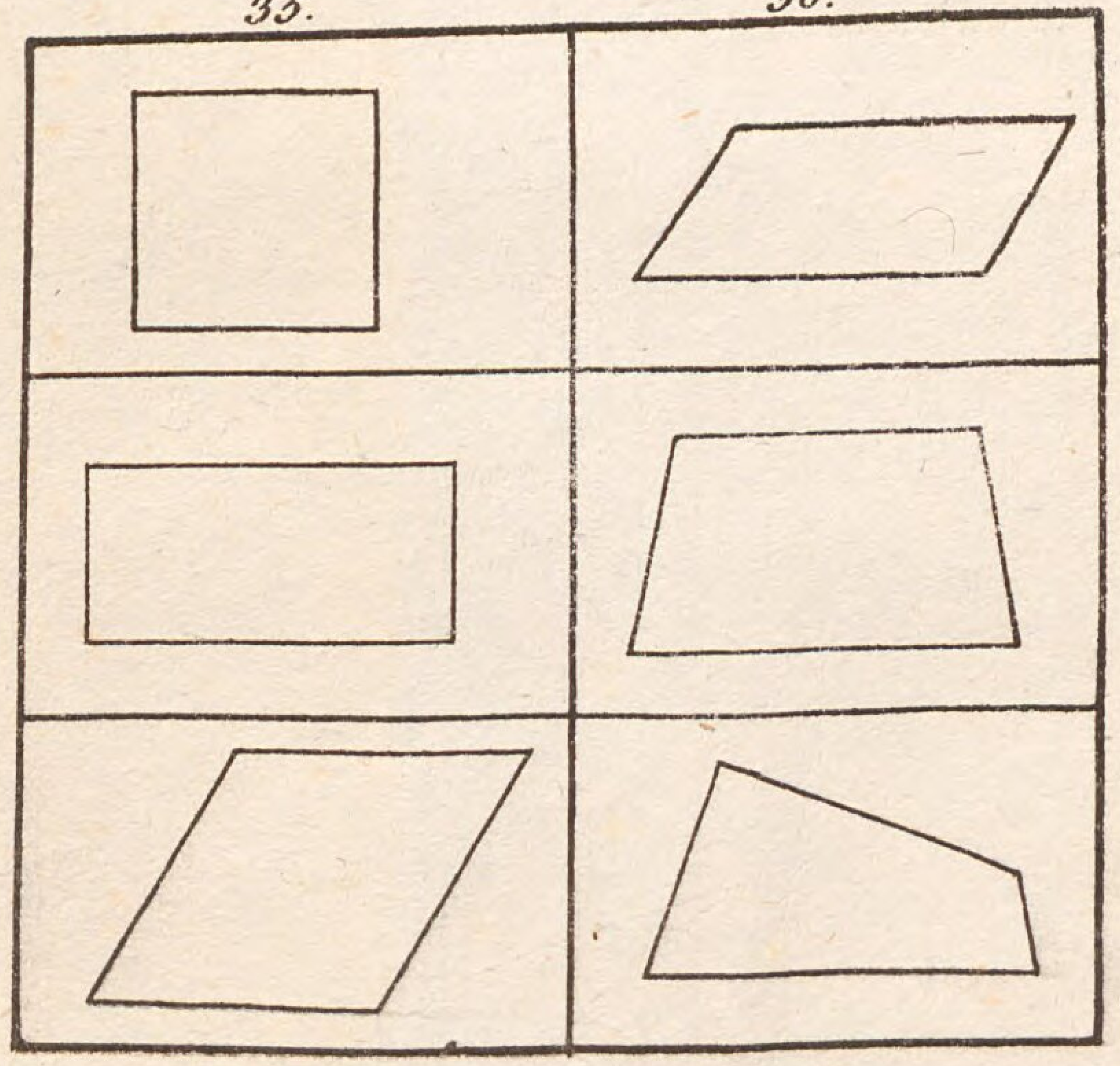
31. 32.



33. 34.

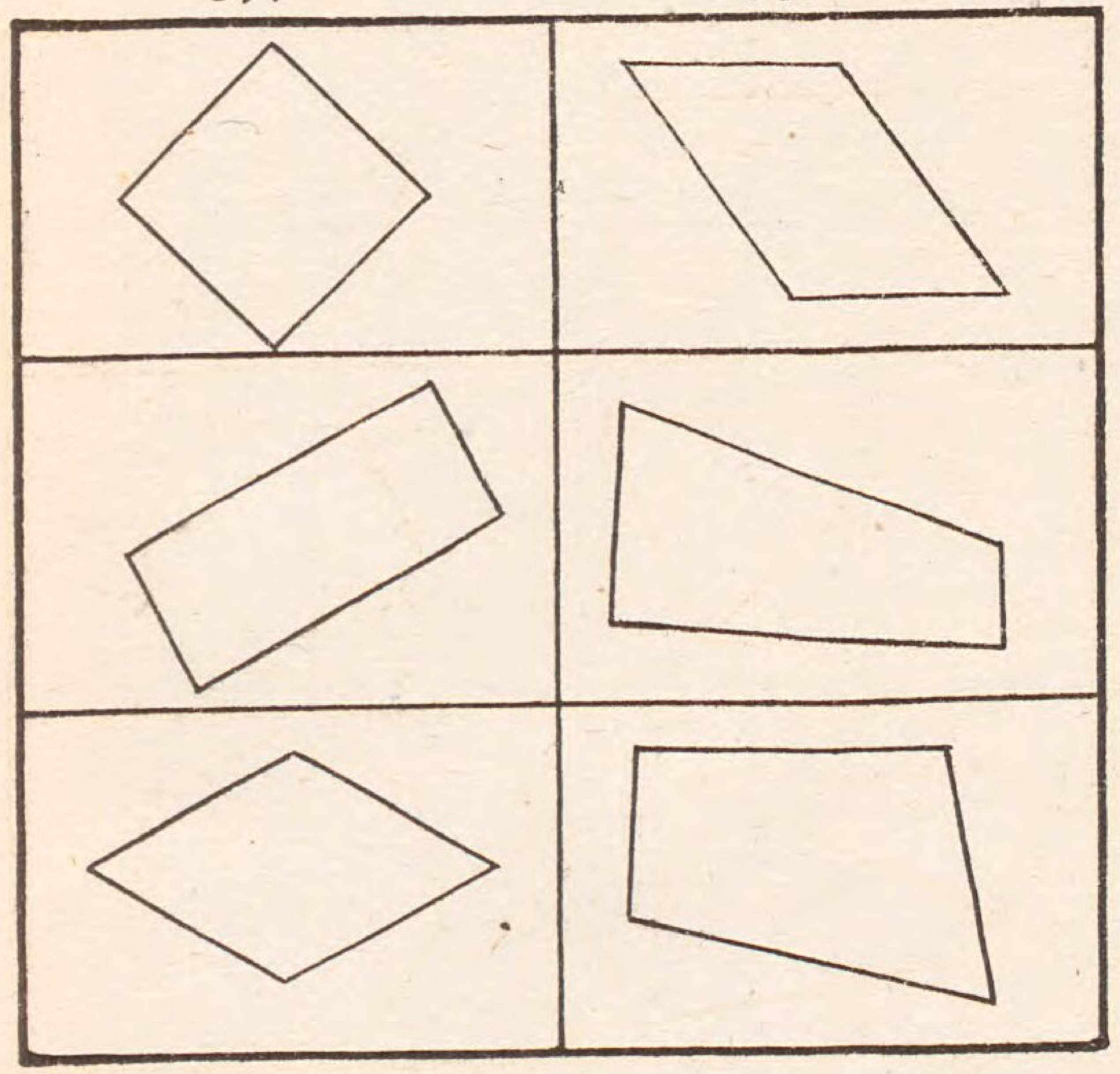


35. 36.

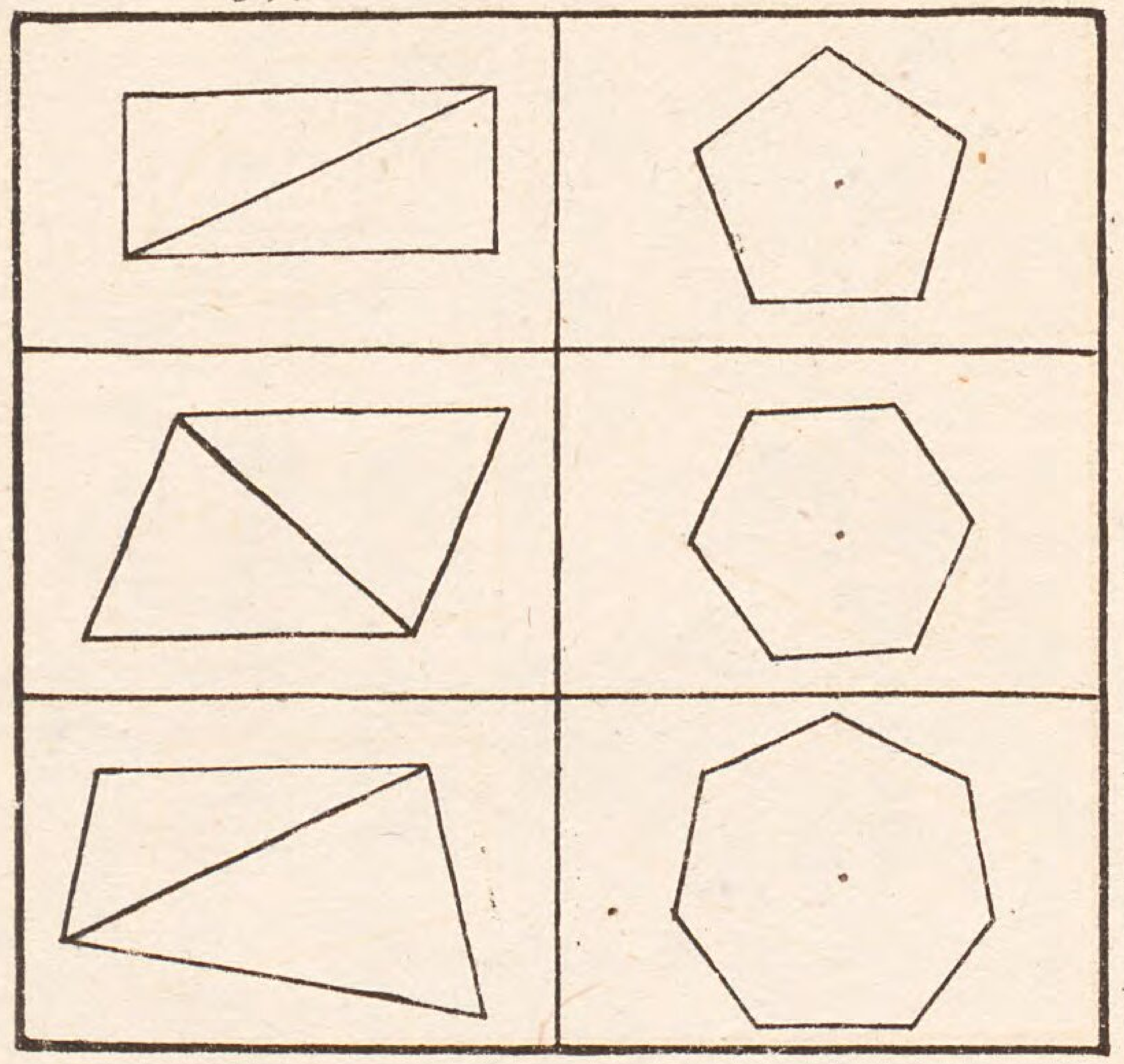


Tafel IV.

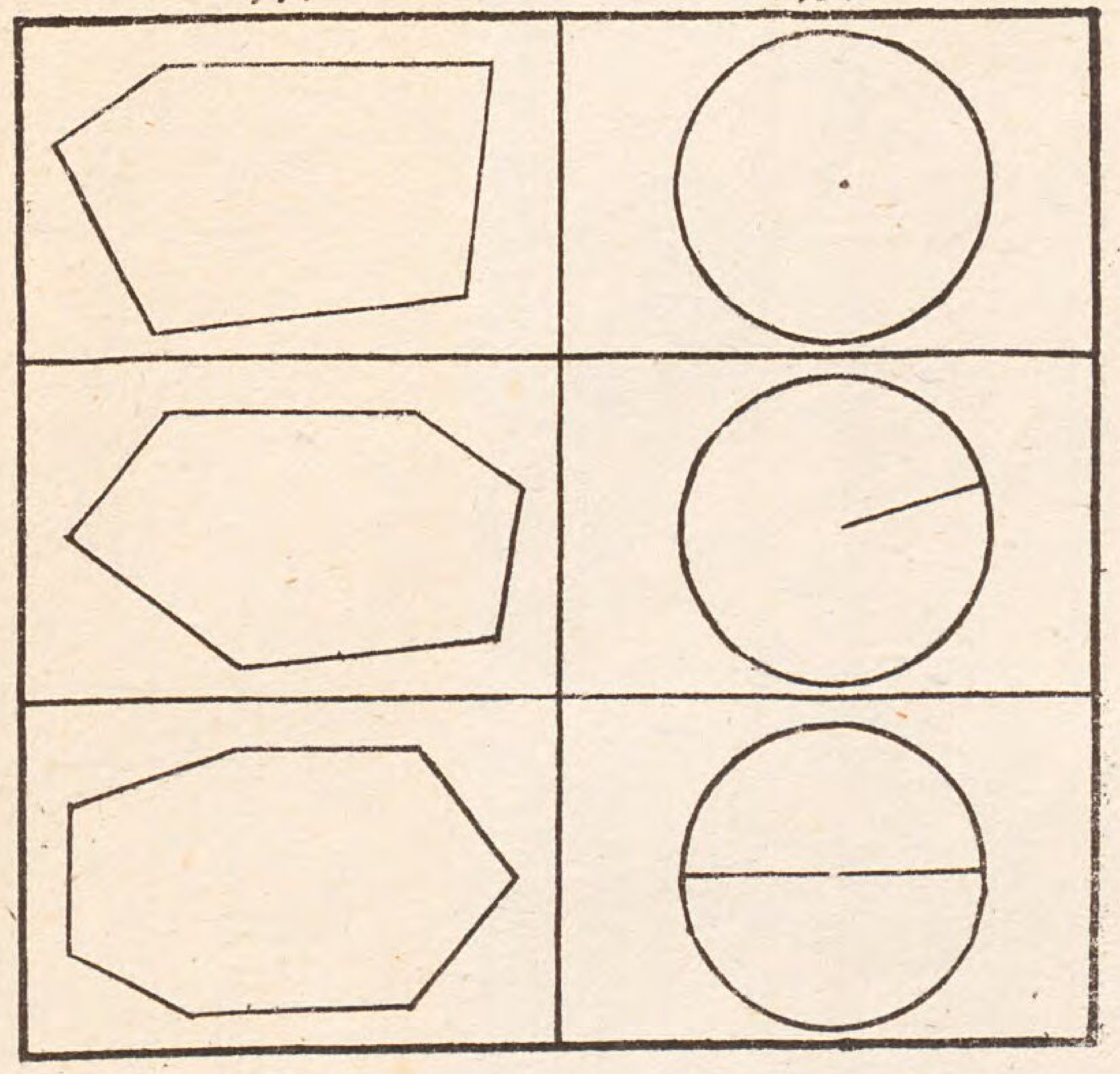
37. 38.



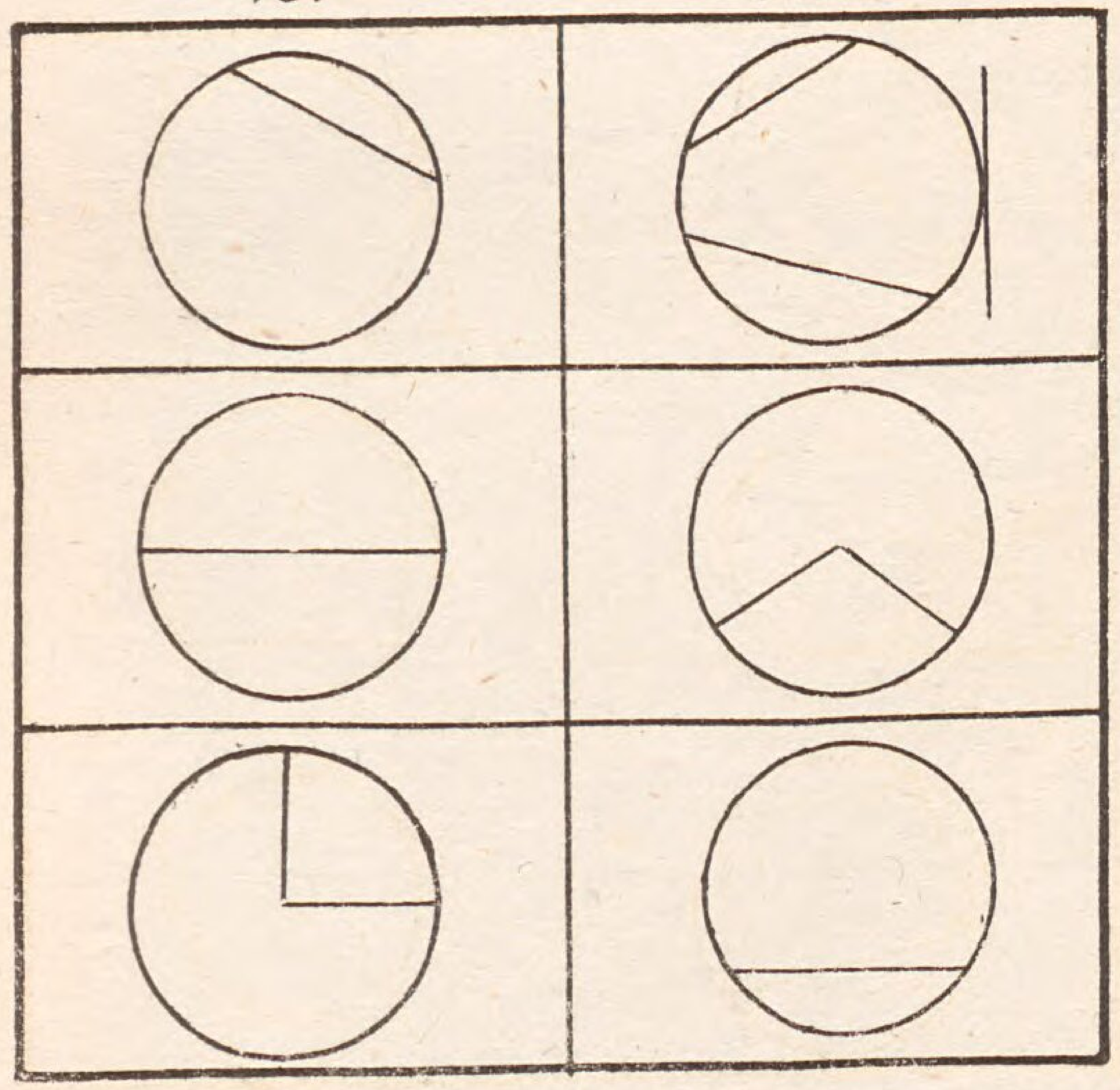
39. 40.



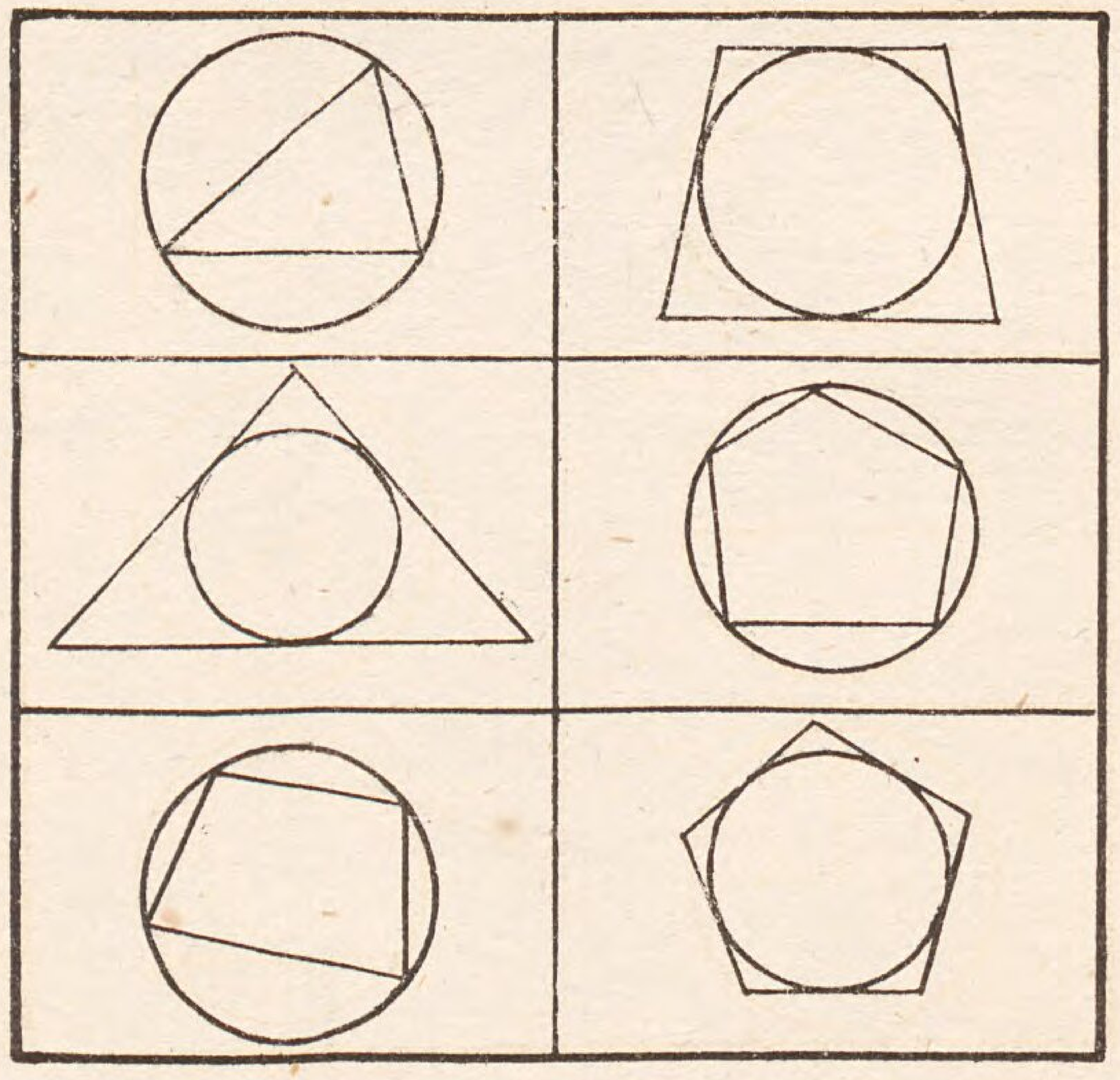
41. 42.



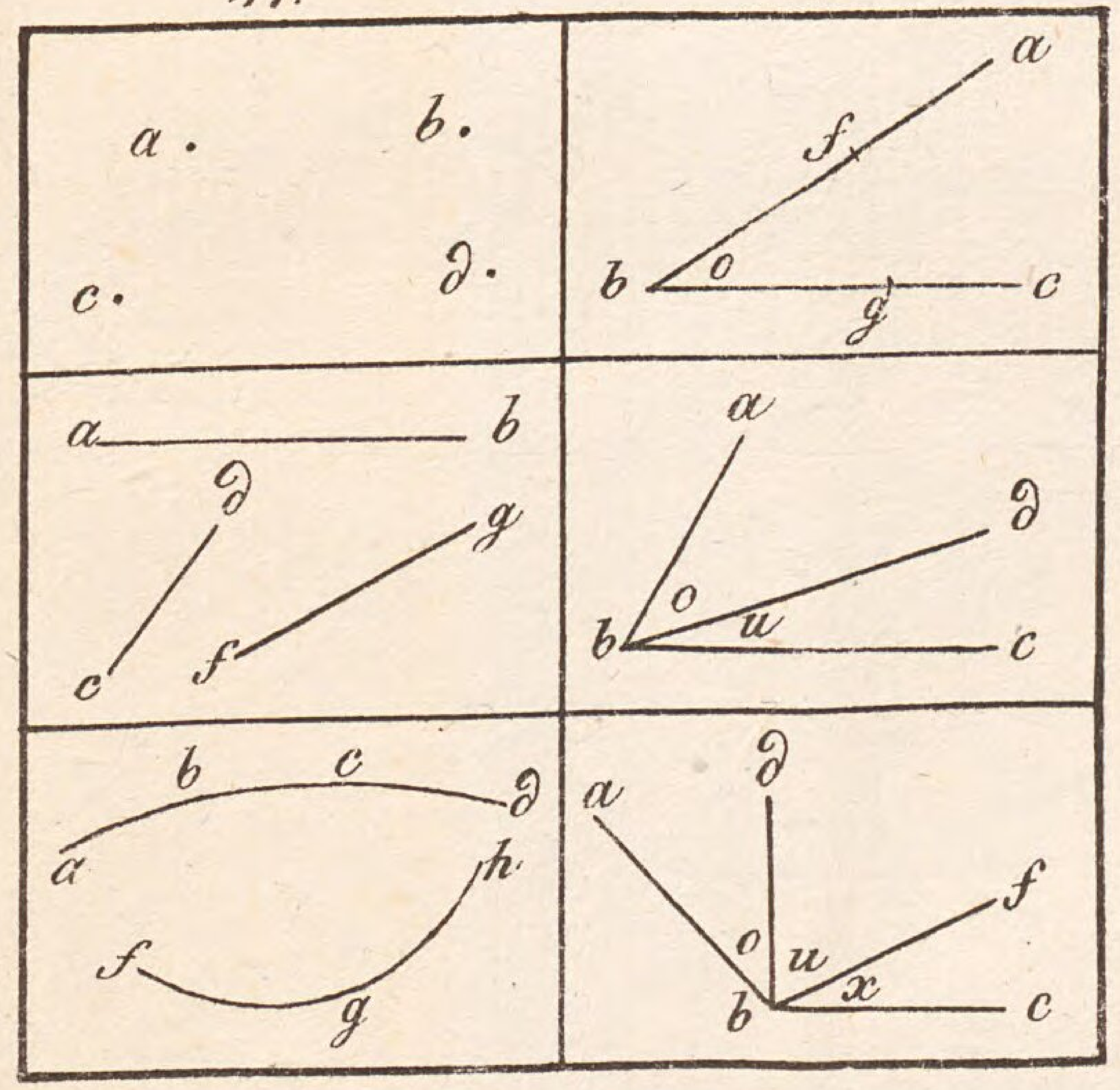
43. 44.



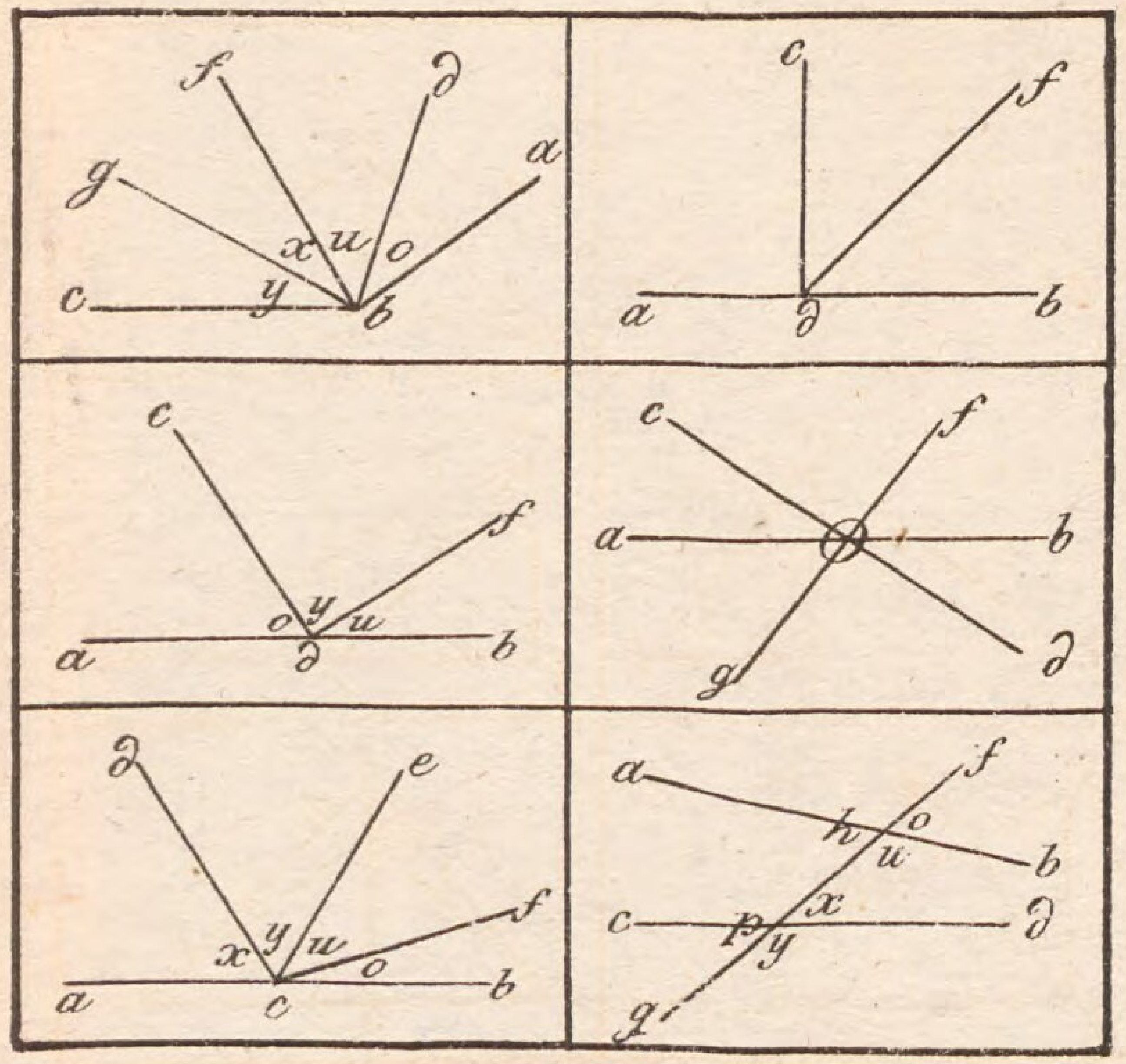
45 46.



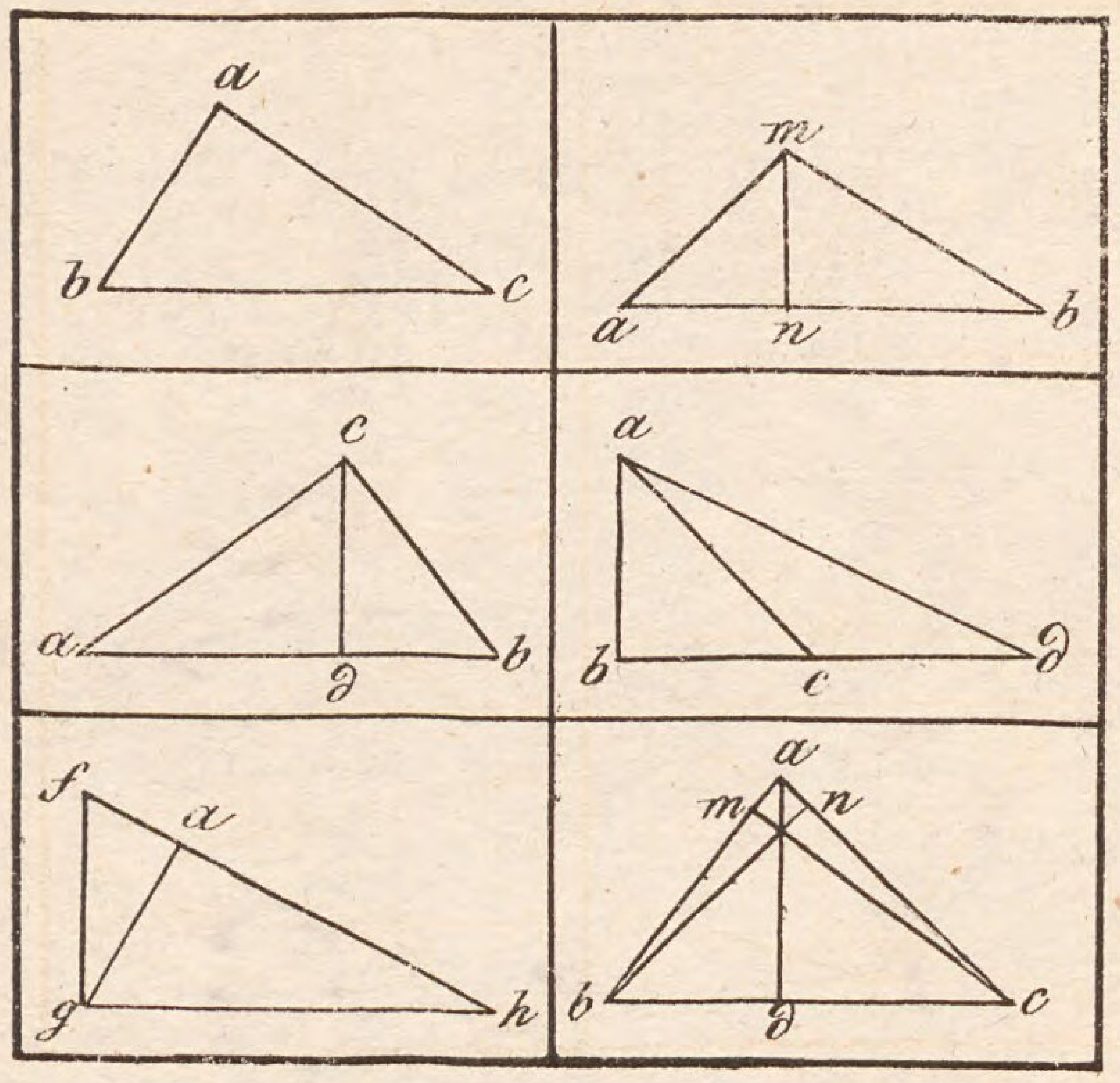
47. 48.



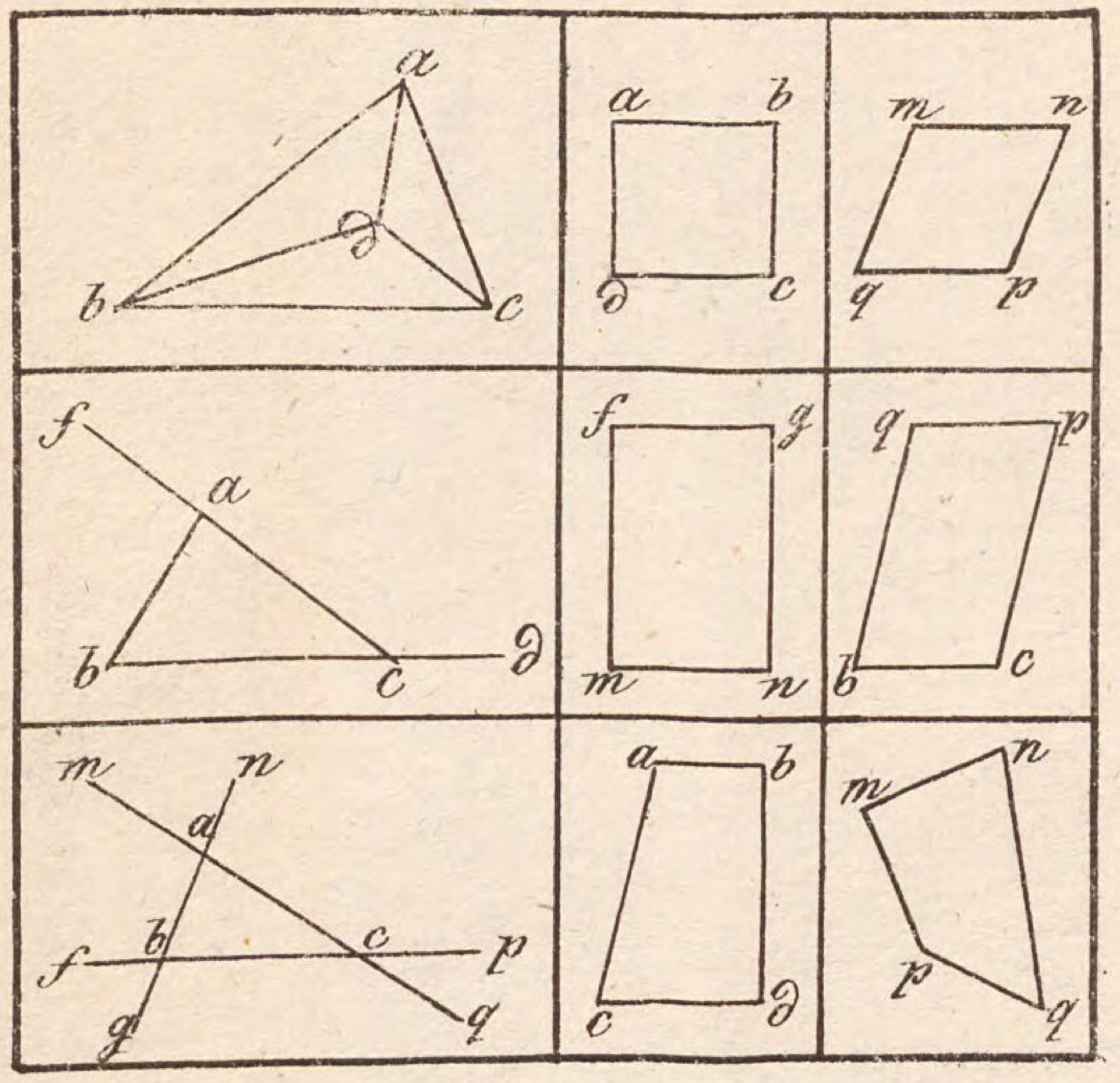
49. 50.



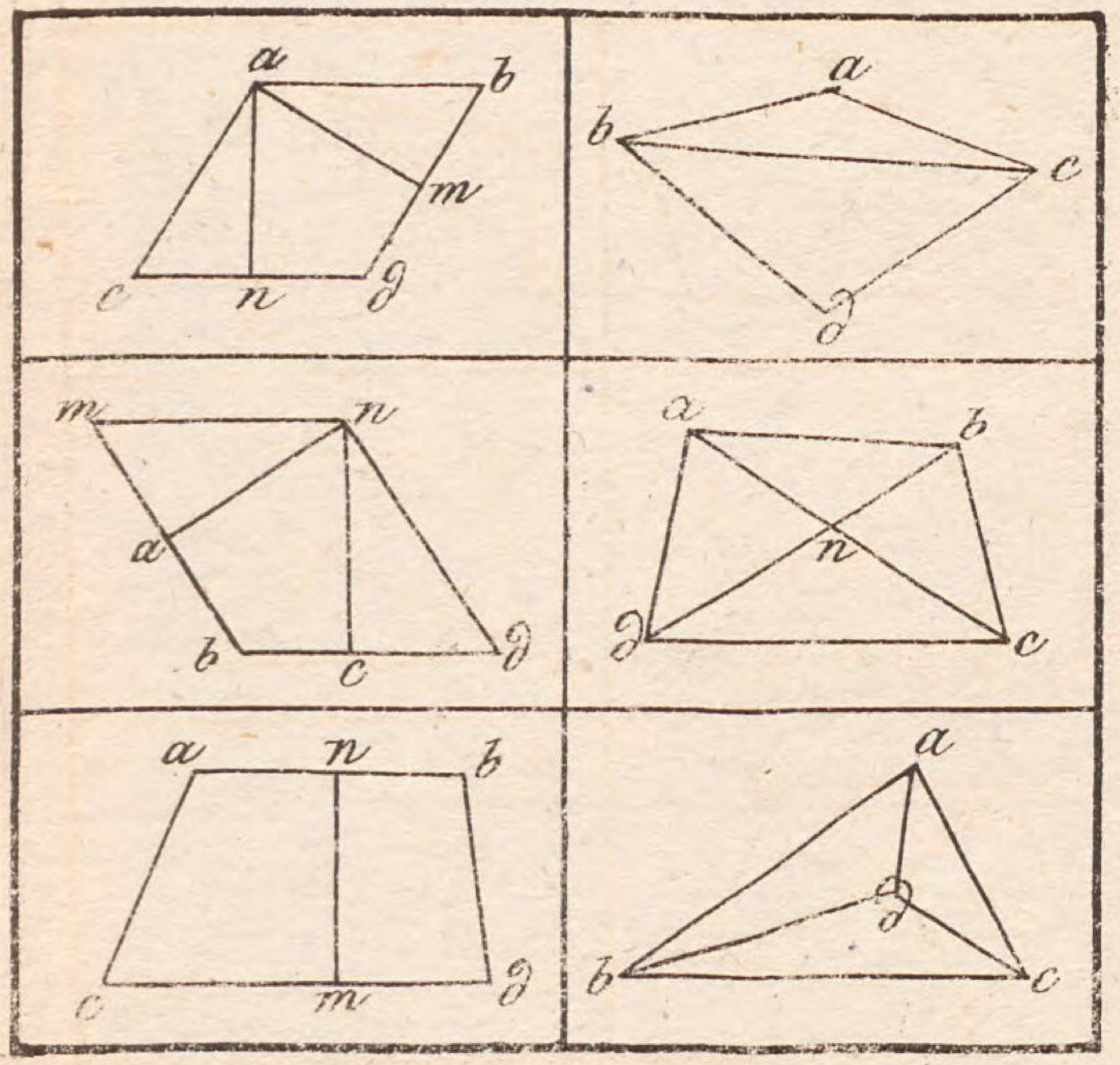
51. 52.



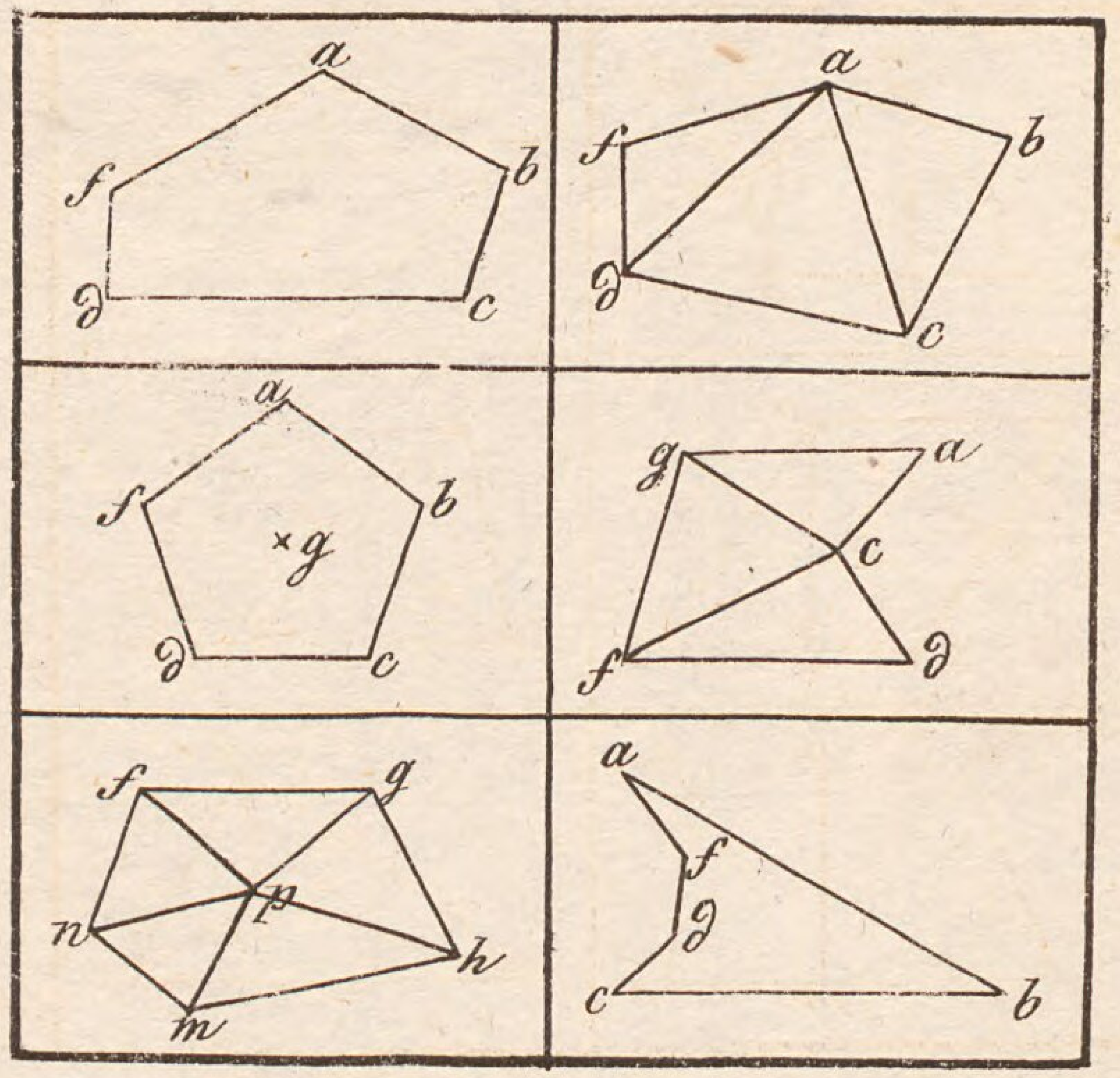
53. 54.



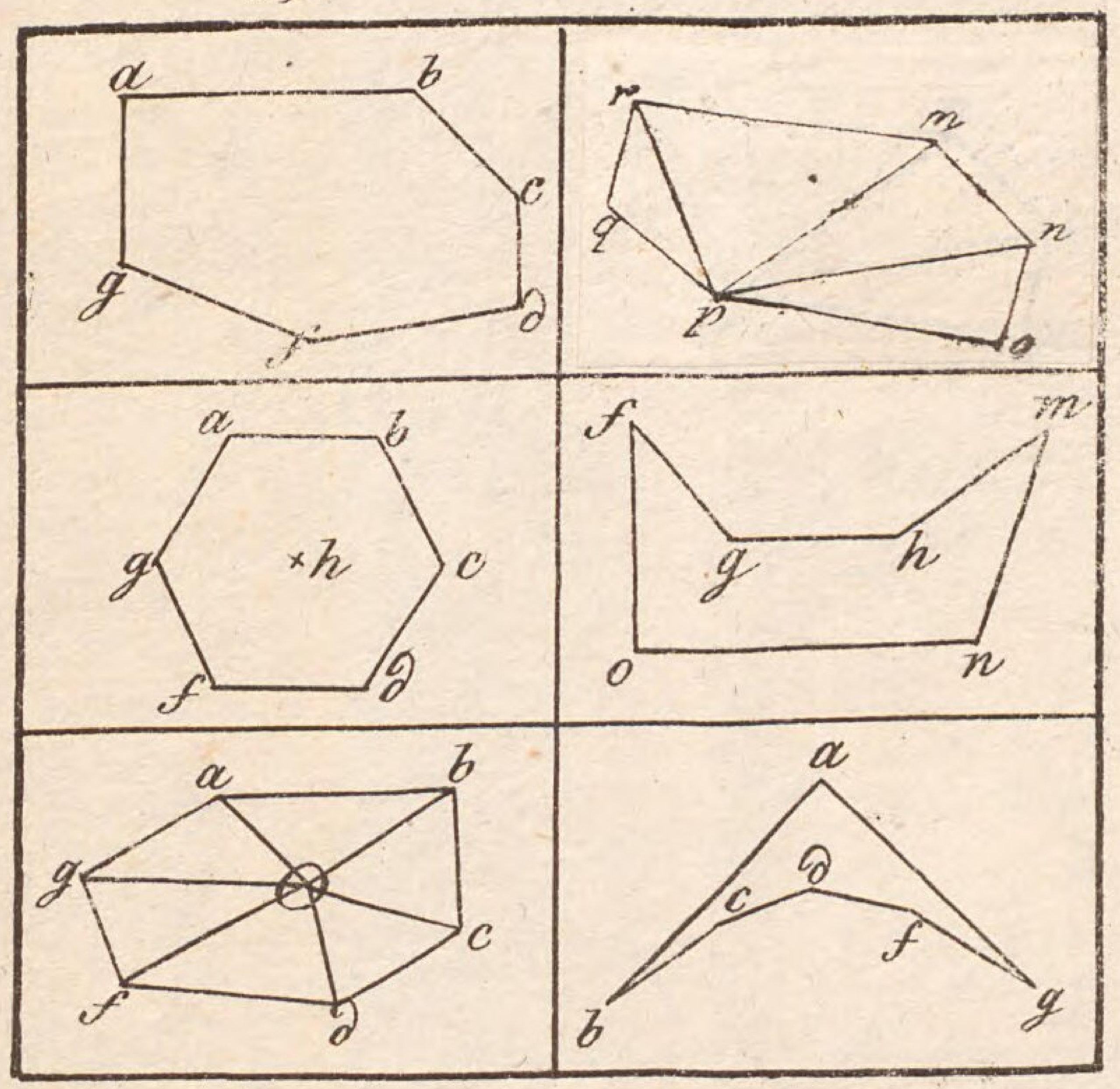
55. 56.



57. 58.

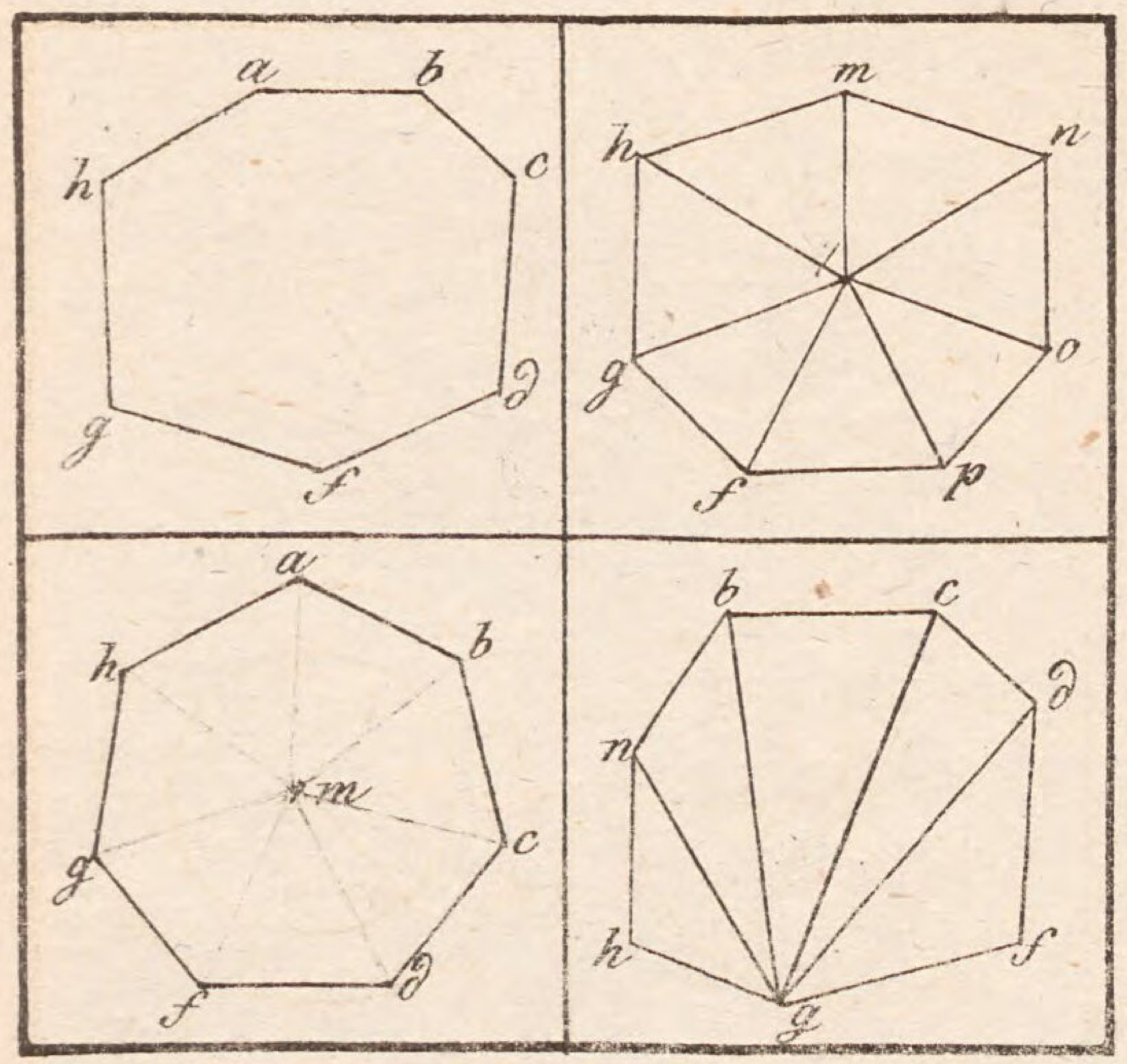


59. 60.

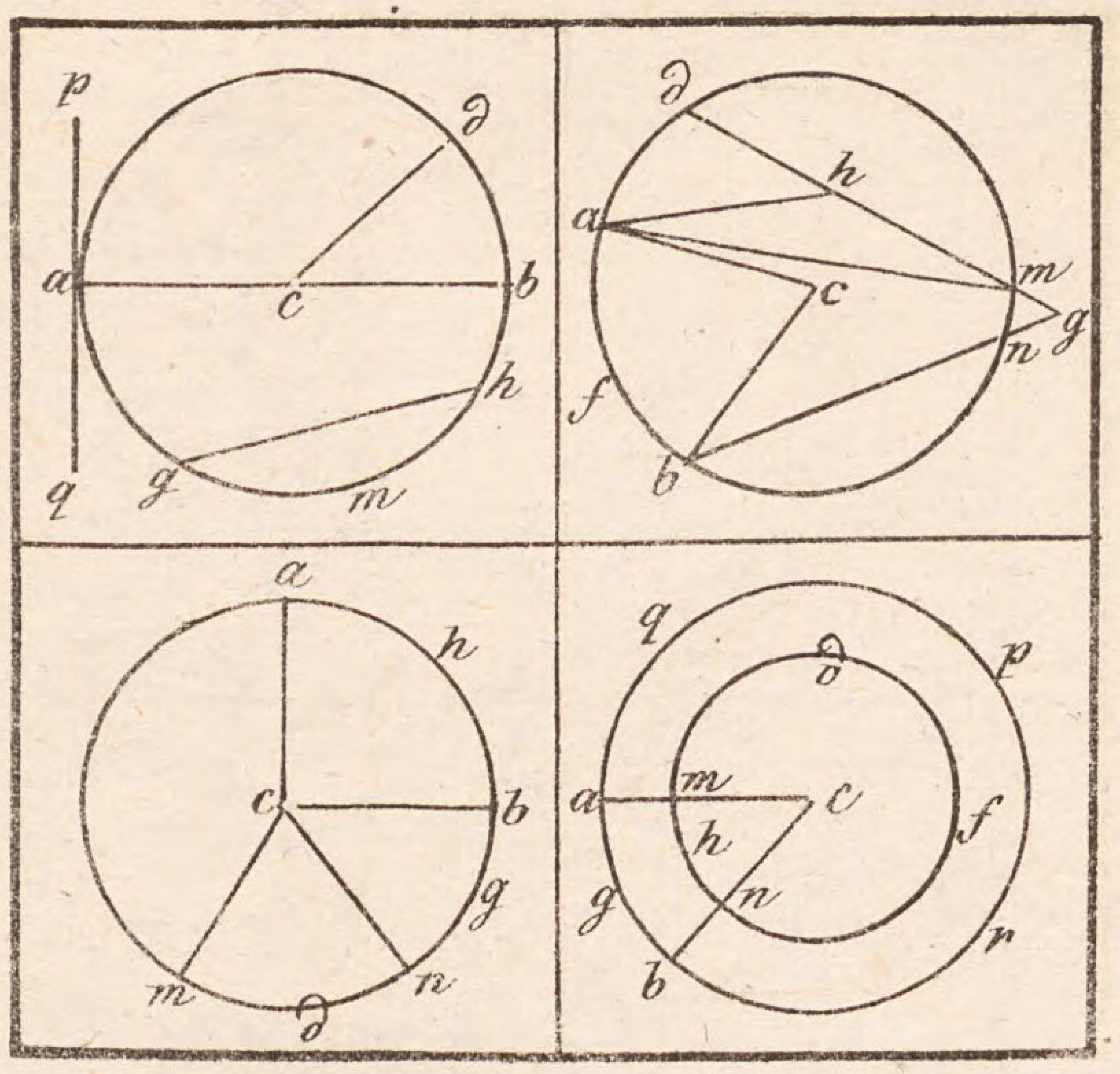


Tafel VI.

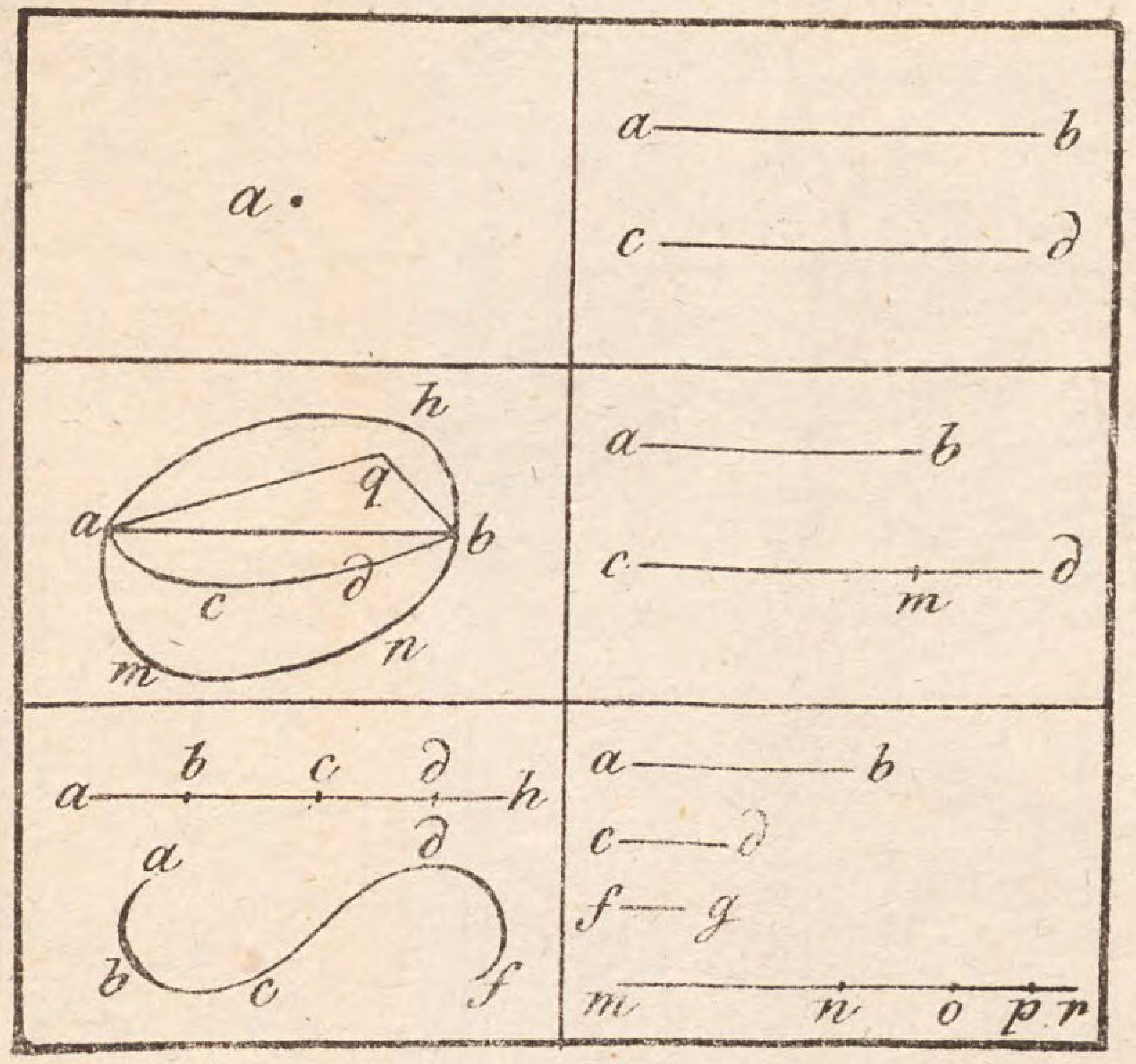
61. 62.



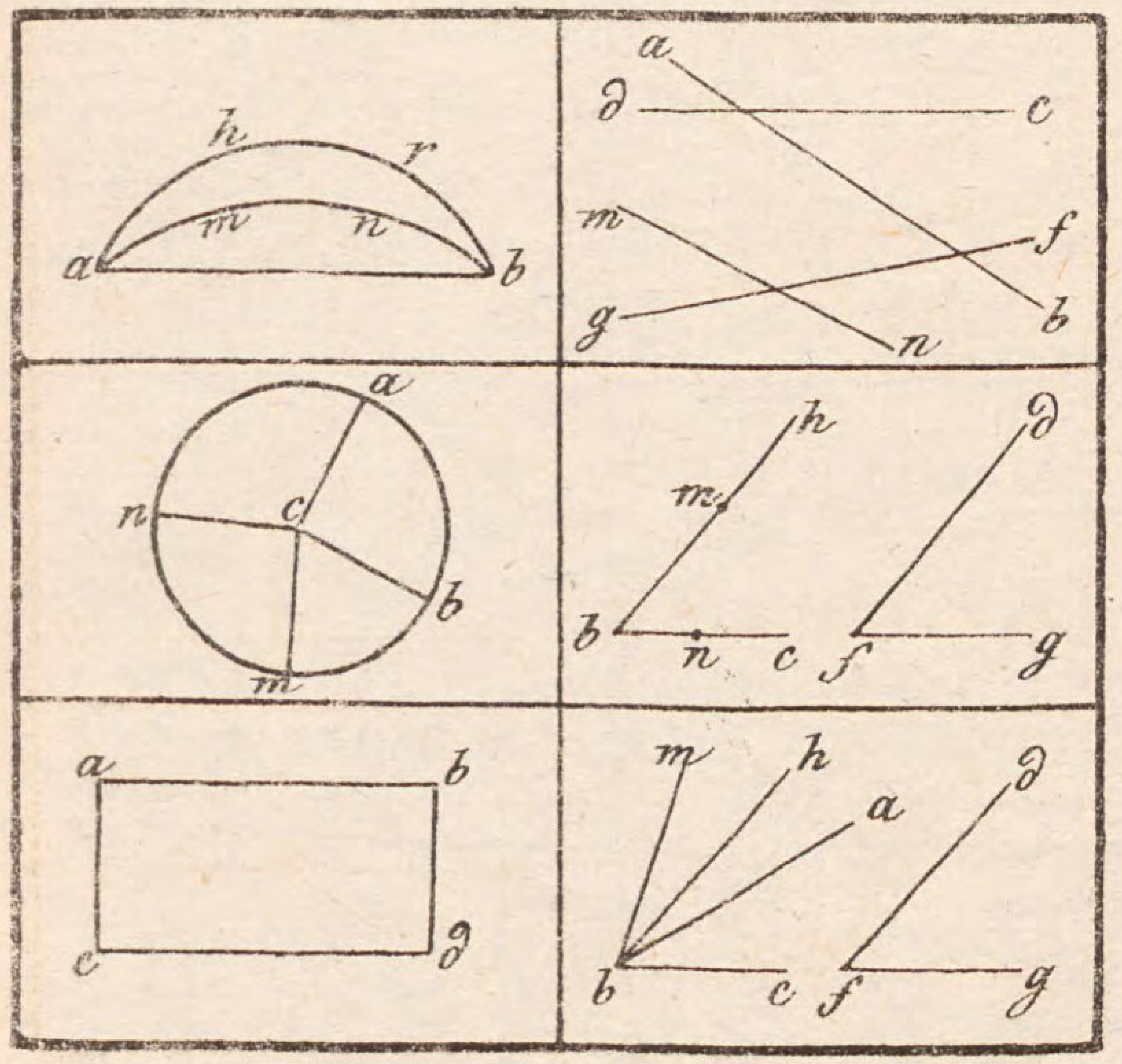
63. 64.



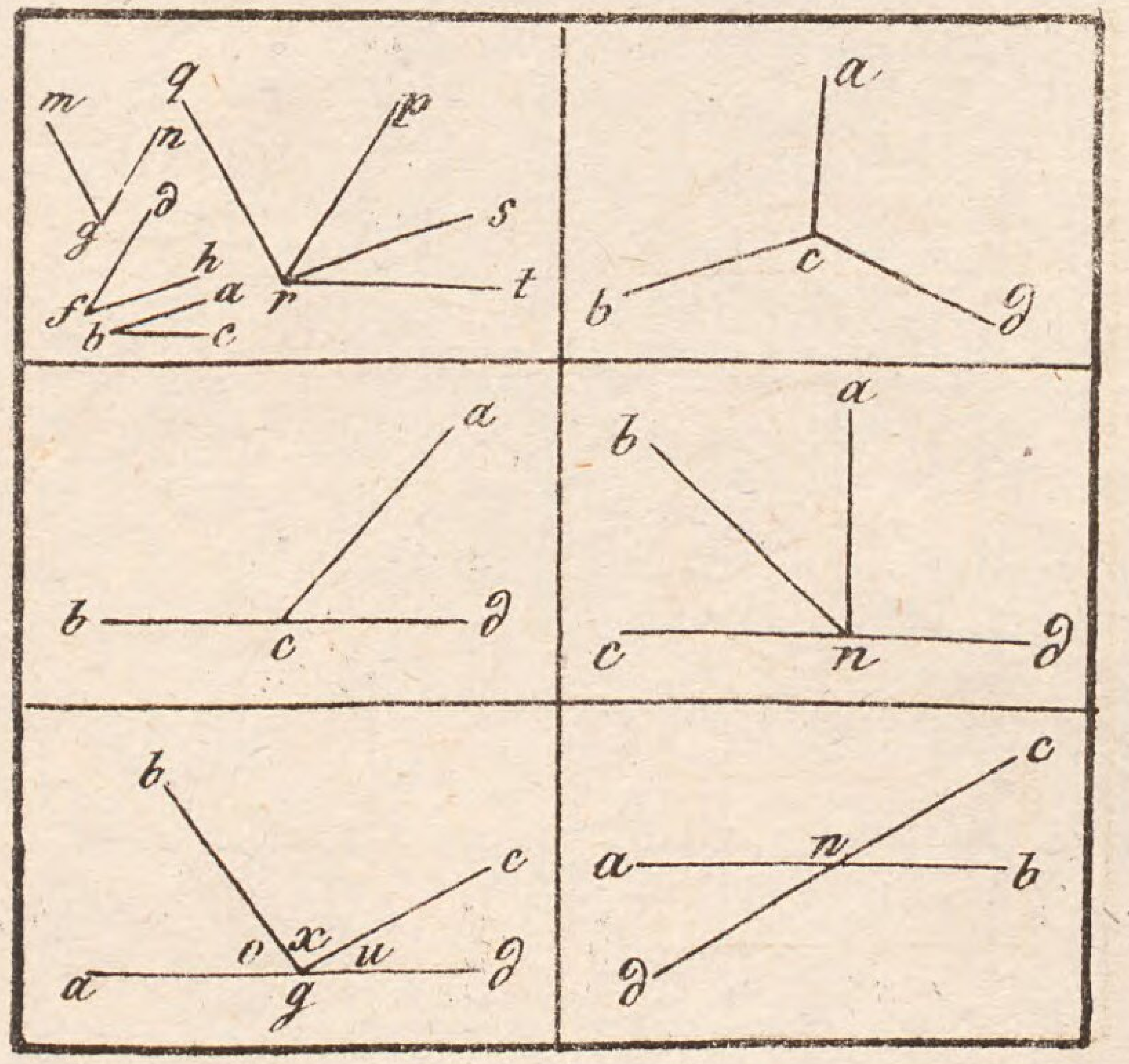
65. 66.



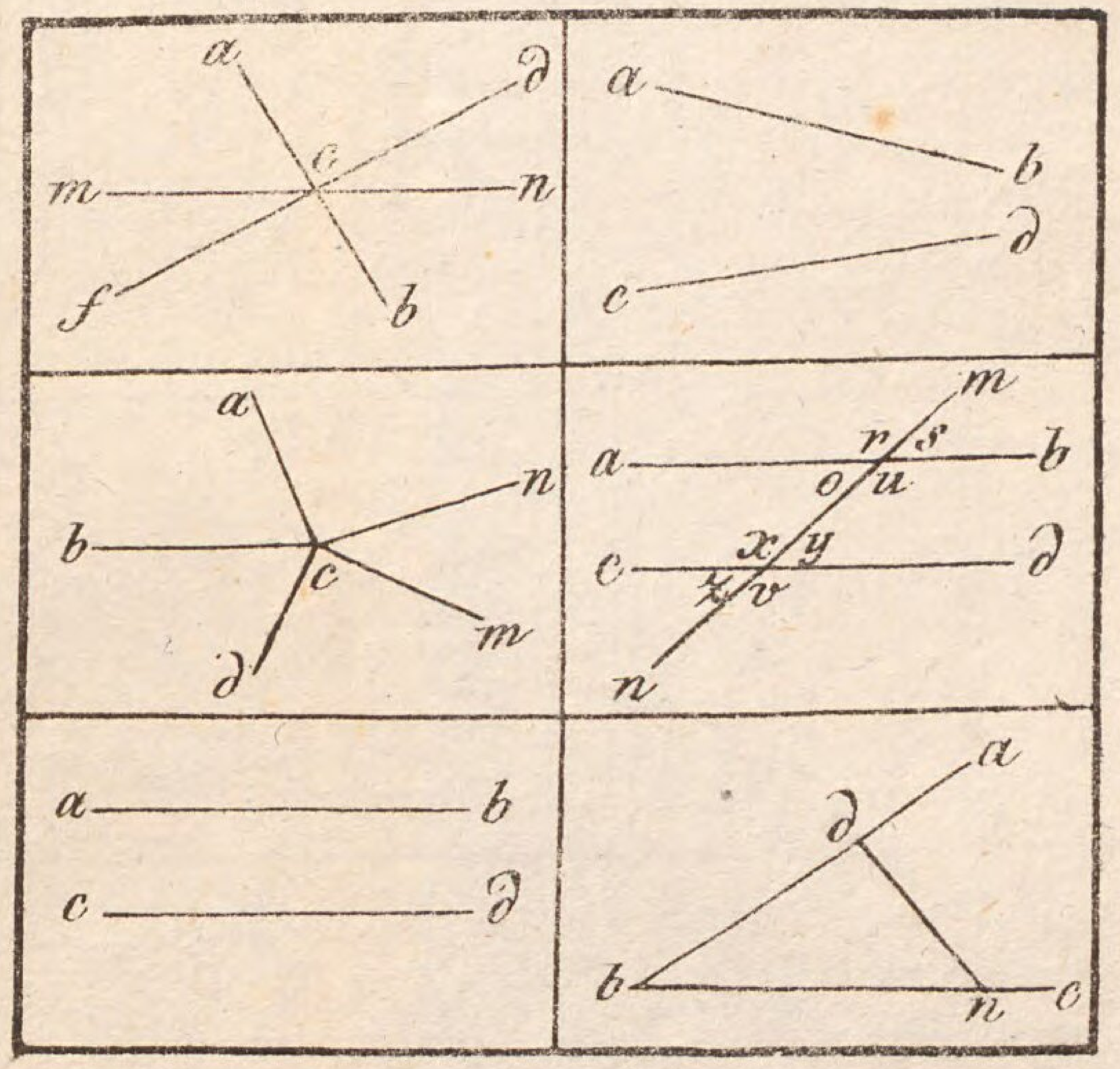
67. 68.



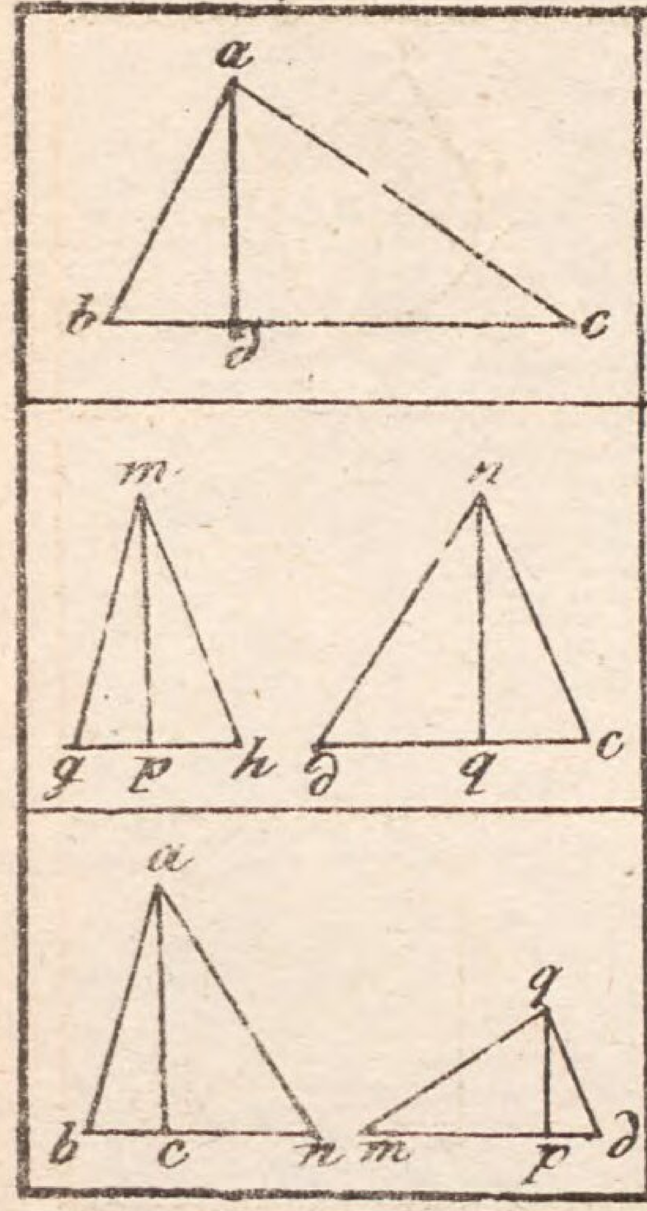
69. 70.



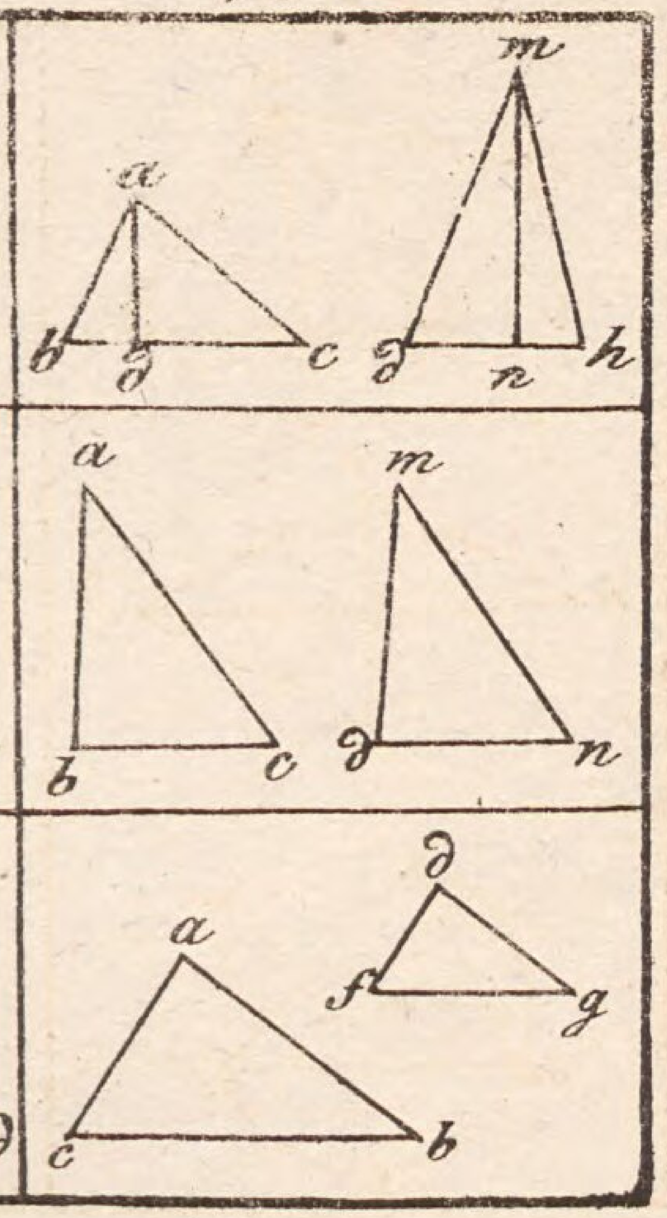
71. 72.



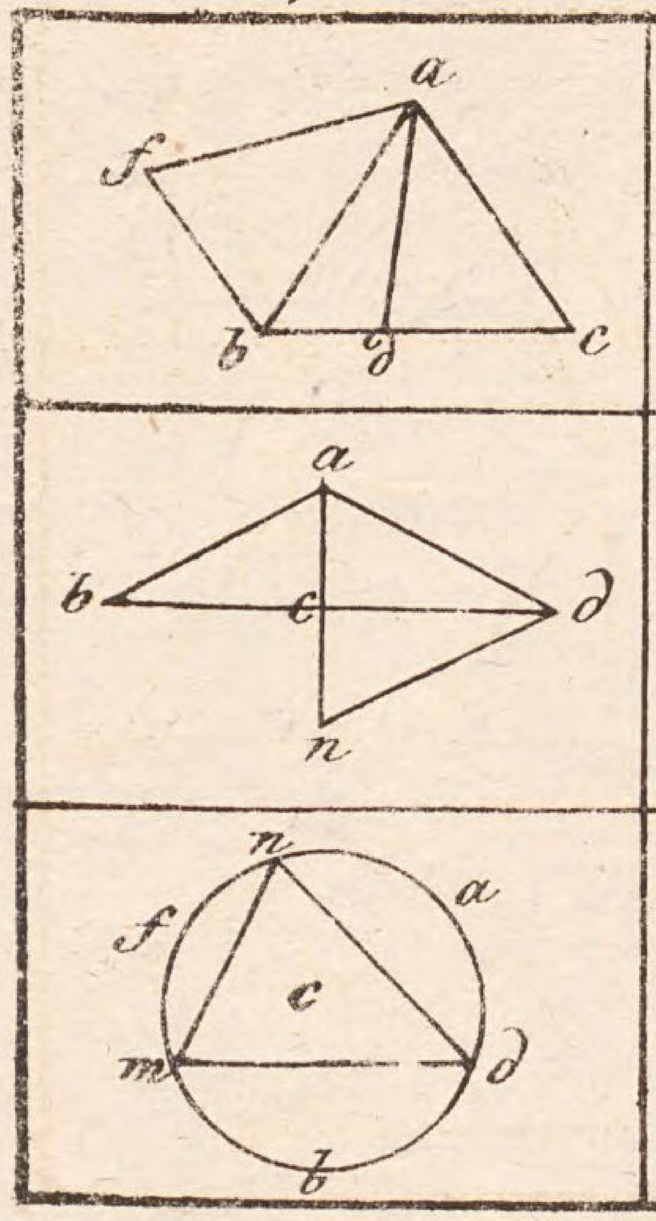
73.



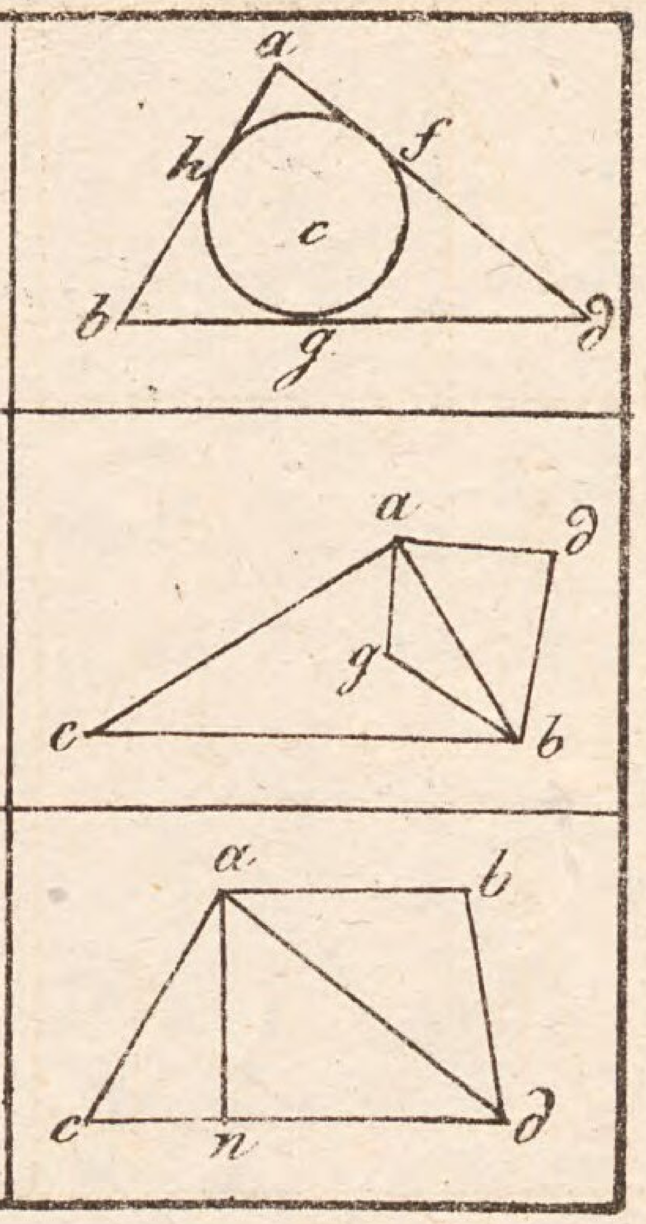
74.



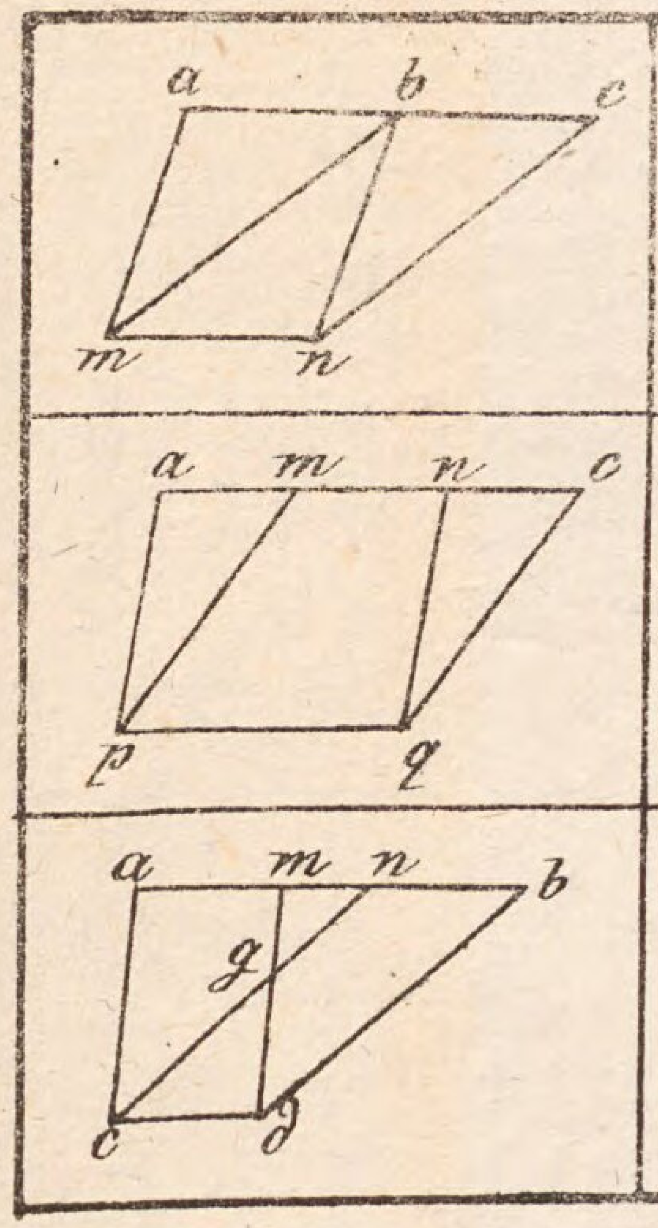
75.



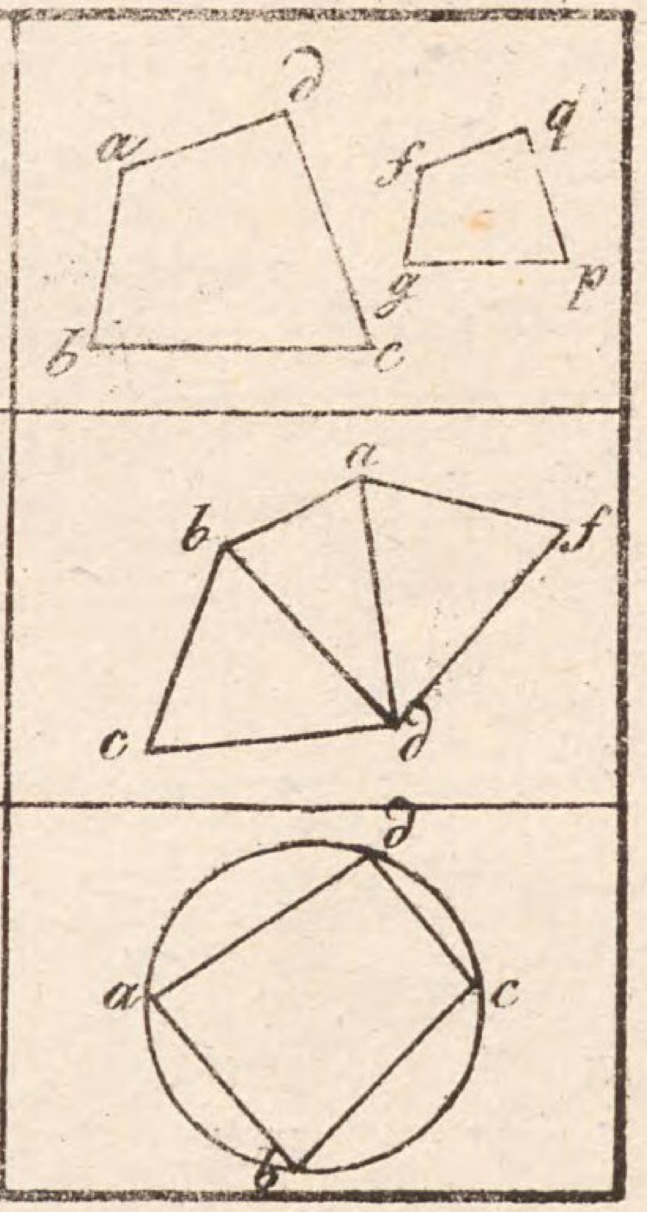
76.



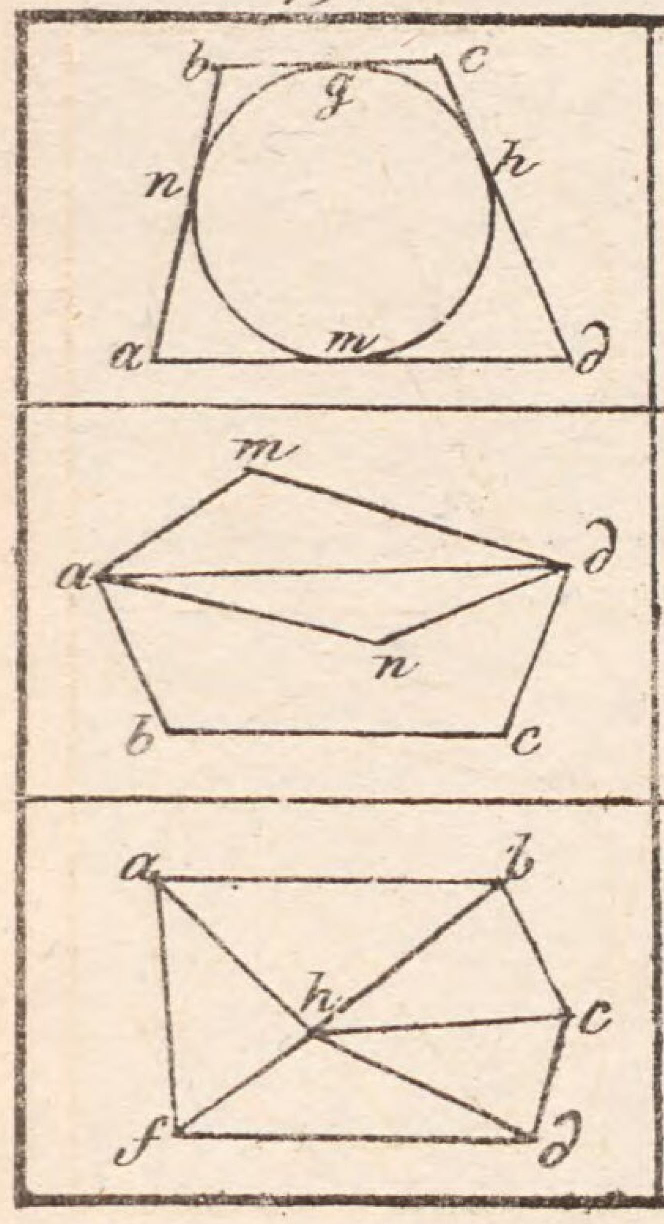
77.



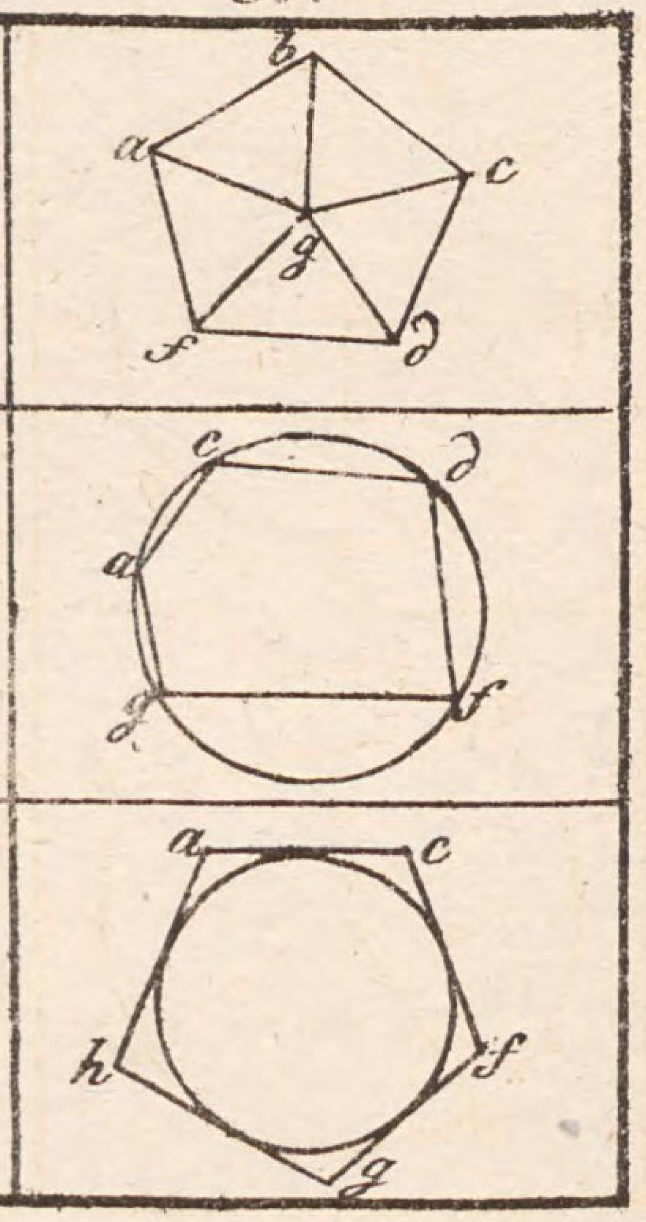
78.



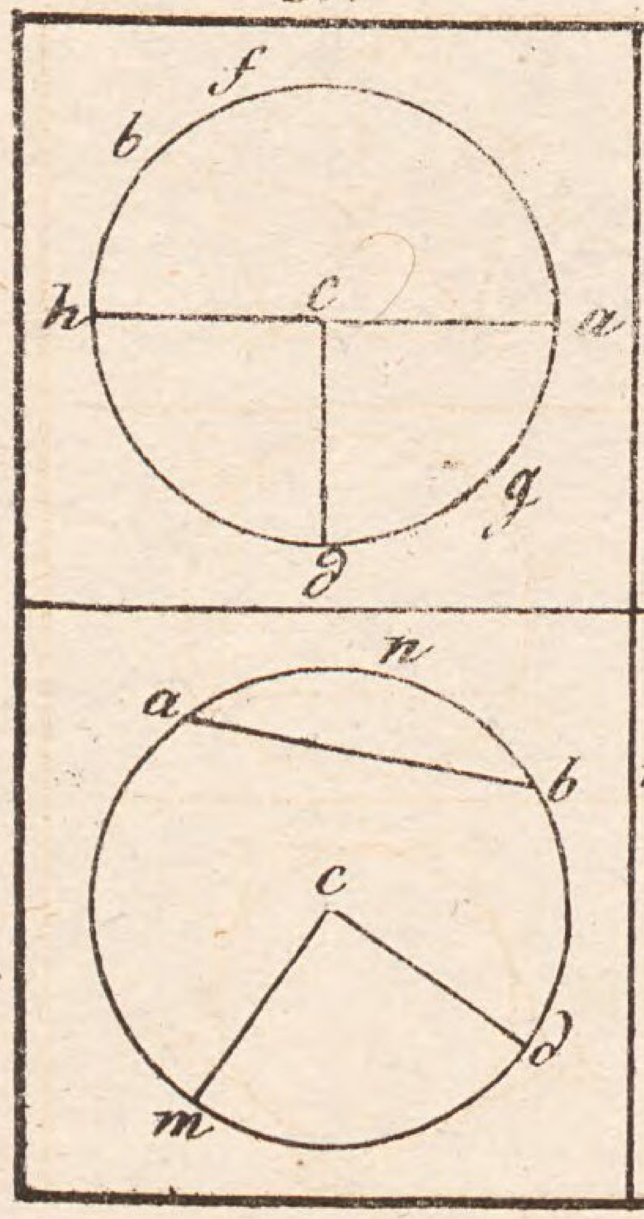
79.



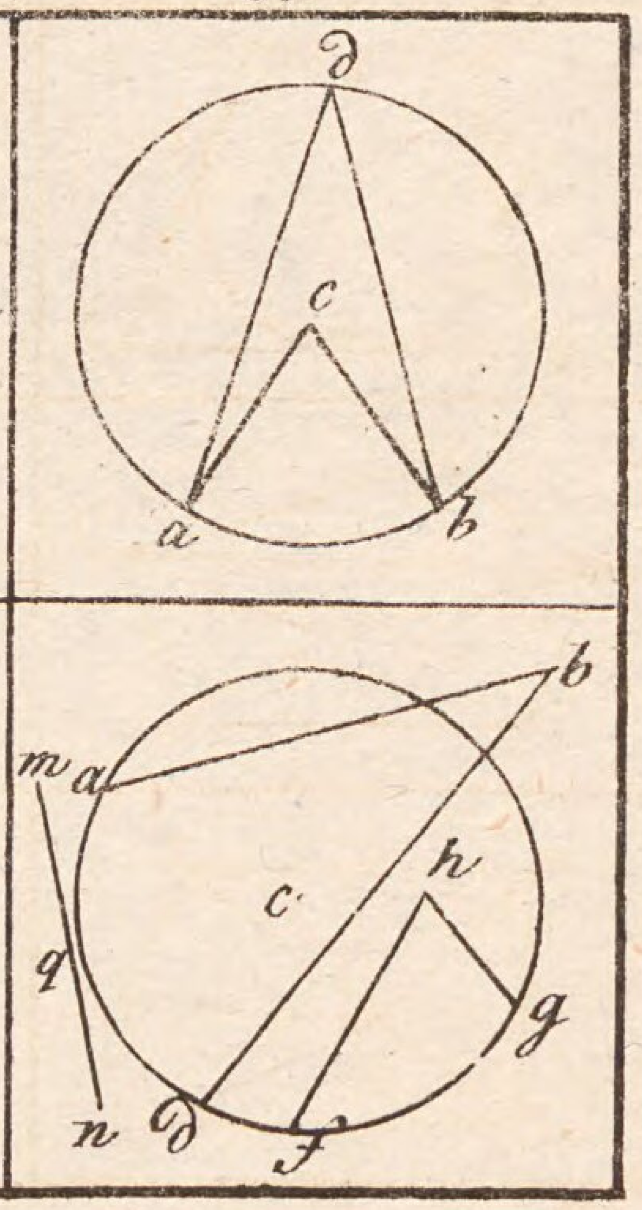
80.



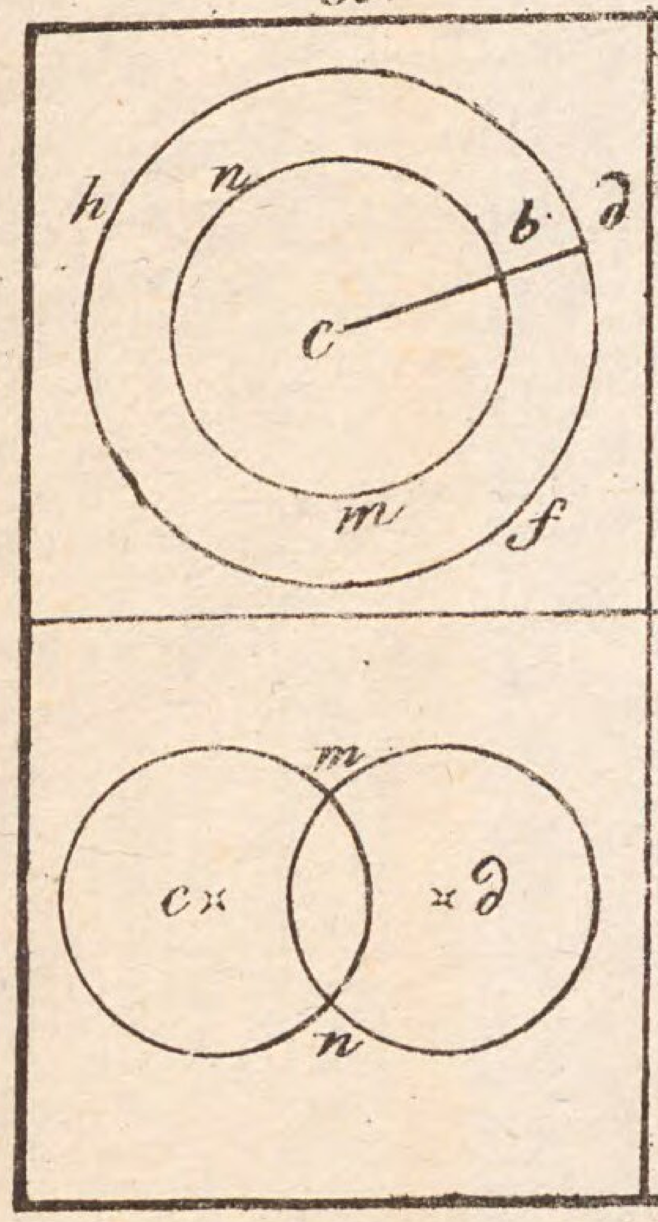
81.



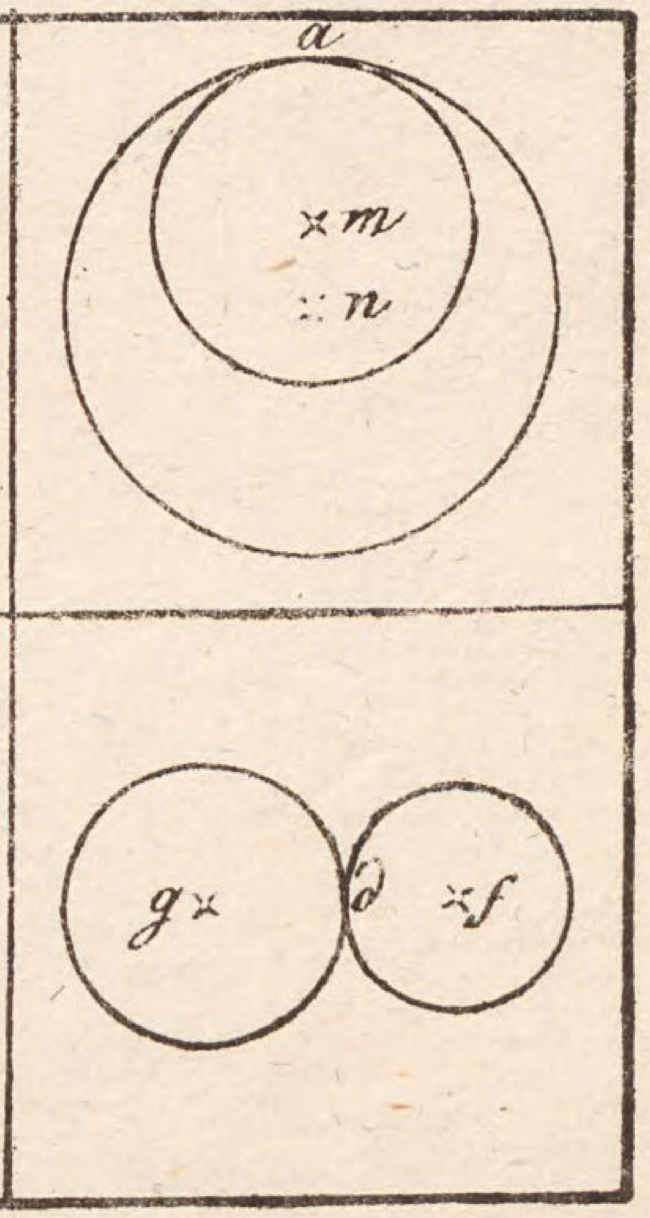
82.



83.



84.



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hoffmann, Johann Josef Ignaz <<von>>,

Geometrische Anschauungslehre Eine Vorbereitung zum leichten und grü
ndlichen Studium der Geometrie

Mainz 1815

Math.p. 705 d
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083226-6